الإحصاءات الترتيبية

Order Statistics

تأليف

الدكتورة/ ثروت محمد عبد المنعم محمد إبراهيم

أستاذ مشارك في الإحصاء الرياضي

قسم الرياضيات - كلية العلوم للبنات بالدمام

المملكة العربية السعودية

مكتبة المتنبي

AL MOTANABI BOOK SHOP

الإحصاءات الترتيبية

Order Statistics

تأليف

الدكتورة/ ثروت محمد عبد المنعم محمد إبراهيم

أستاذ مشارك في الإحصاء الرياضى

قسم الرياضيات -كلية العلوم للبنات بالدمام

المملكة العربية السعودية

٢٠٠٩م

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
إبراهيم ، ثروت محمد عبدالمنعم محمد
الإحـصاءات الترتيبية./ ثروت محمد عبدالمنعم محمد إبراهيم. -
الدمام ، ١٤٣٠هـ
... ص ؛ ... سم
ردمـك : ٧ - ٠٢ - ٨٠٢٤ - ٦٠٣ - ٩٧٨
١- الإحصاء الرياضي أ- العنوان
ديوي ٥١٩,٥ ١٤٣٠/٧٠٩

رقـم الإيـداع: ١٤٣٠/٧٠٩
ردمك: ٩٧٨-٦٠٣-٨٠٢٤-٠٢-٧

الطبعـة الأولى

١٤٣٠هـ - ٢٠٠٩م



مكتبة المتنبي
AL MOTANABI BOOK SHOP
الدمام - شارع المستشفى المركزي هاتف : ٨٤١١٣٩٥ / ٨٤١٣٠٠٠ فاكس : ٨٤٣٢٧٩٤
ص.ب : ٦١٠ الدمام ٣١٤٢١ المملكة العربية السعودية

بسم الله الرحمن الرحيم

وقل ربي زدني علماً

اهـــداء

ان الحب قد يشمل فئه من الناس
اما الحنان فيشمل العالم بأكمله.
فإلى عمتى التى كانت مدرسة للحنان
رحمها الله وأسكنها فسيح جناته

شكر وتقدير

بسم الله الرحمن الرحيم

لاتقنطوا من رحمه الله

إن أروع أحساس في الوجود أن نجد أناس نعتبرهم ملائكة في الأرض يقفون بجانبك ويأخذون بيدك وقت المحن – فإليهم جميعاً أدعو لهم بالتوفيق في الحياه وجنة الفردوس في الآخره وهم اخواني في الله.

علاء الدين تيمور	منيرة الدوسرى
د. أميرة الضاوي	لطيفه يوسف الدوسرى
حنان السدحان	سبيكه يوسف الدوسرى
نوره الحسين	صلاح يوسف الدوسرى
د. ساره السدحان	يوسف شاهين الدوسرى
خالد السدحان	مها شاهين الدوسرى
عبير السدحان	ايمان عبد الله الدوسرى
ندي السدحان	نهاد شاهين الدوسرى
ريم جابر	د. فوزيه البراهيم
د. لطيفه على	د. منيره عبد الله الهاجرى
د. اروى الشيبانى	د. نوره عبد الله الهاجرى
محمد العمر	د. شيخه عبد الكريم
عبدالله خالدالسدحان	د. ساره العريفى
ريما العمر	ديما العمر
حليمه شعبان	عبد الله العمر
الجازى المرى	د. مها الحامد
نهى الملا	نجلاء العريفى
بندر عبد الله الملا	د. نوره الصالح
د. نوال الفايز	موزه عبد البارى جمال الليل
د. هدى الخرسانى	منى عبد الرحمن المجيدل
د. ريم البلالى	ليلى الكعبى
د. منيرة الهاجرى	فاطمة شكر الله

شكر وتقدير

اقـــدم وافر شكرى إلى طالبـــاتى وبنـــاتى تمهيدي ماجستير (إحـــصاء رياضـــى) لعـــام ١٤٢٧هـــ وهن كالتالى:

١. ايمان المبيض
٢. مرام الوهيبى
٣. العنود البوعينين
٤. نوال الرشيدى
٥. نوف الشهاب
٦. مهـــا المهباد
٧. امينة النغموش

على ما بذلنه من جهد فى المـــشاركة فـــى الطباعة الاوليه للكتاب.

كما أتقدم بشكر خاص لطالبة الدراســـات العليا زينب المرزوق علي ماقامت بـــه مـــن المراجعه النهائية للكتاب وتصحيح الاخطـــاء فلها مني جزيل الشكر.

تمهيد

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على اشرف المرسلين محمد وعلى آله وصحبه أجمعين. أما بعد فالحمد الله الذي هدانا وما كنا لنهتدي لولا أن هدانا الله الذي أنعم علي بتأليف هذا الكتاب تلبيه لنداء التعريب الذي يتبناه الكثير من العلماء والمثقفين ودعماً للمكتبه العربية لندرة المراجع والكتب فى هذا المجال.

الإحصاءات الترتيبية هي عناصر عينه عشوائية مرتبه من الأصغر إلى الأكبر، ولقد زادت أهميتها في السنوات الأخيرة نتيجة لزيادة استخدام الاستدلال اللامعلمي. وقد اكتسبت شهرتها نتيجة لاستخدامها في الحصول على أفضل إحصاء بسيط مثل وسيط العينة ومدى العينة إلى جانب أمور أخرى. هذا الكتاب يصلح كمقرر لطلاب الدراسات العليا تخصص إحصاء رياضي في مرحلة الماجستير أو الدكتوراه.

يحتاج الدارس لهذا الكتاب إلى معرفة أساسيات الإحصاء الرياضي والتفاضل والتكامل.

يحتوى هذا الكتاب على سبعة أبواب، يقدم الباب الأول مفاهيم أساسية في الإحصاءات الترتيبية ، أما الباب الثاني فيهتم بتوزيعات دوال الإحصاءات الترتيبية ، ويتطرق الباب الثالث إلى عزوم الإحصاءات الترتيبية ، كما يهتم الباب الرابع بالتوزيع التقريبي للإحصاء الترتيبي ، كما يقدم الباب الخامس تقديرات تعتمد على الإحصاءات الترتيبية. أما الباب السادس فيتطرق إلى التقدير بفترة لمعالم بعض التوزيعات بالاعتماد على الإحصاءات الترتيبية. وأخيراً يتناول الباب السابع الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية مستقلة وغير متطابقة التوزيع. ومما يجدر الاشاره إليه ان هذا الفصل يقدم مواضيع متقدمة فى الإحصاءات الترتيبية تناولتها قليل من المراجع الاجنبيه باختصار شديد. ولذلك حاولت ان أتناول هذا الموضوع بأسلوب سهل ومشوق يشجع كثير من الباحثين فى الإحصاء الرياضى لاقتحام هذا المجال. هذا ويعتبر هذا

الكتاب المرجع العربى الاول على مستوى العالم العربى وأســـأل الله أن اكون قد وفقت فى هذا المجهود المتواضع خدمة لقضايا البحث العلمى فى وطننا العربى.

واني أرحب بكل نقد بناء يهدف إلى الأفضل وما الكمال إلا لله وحده والله ولى التوفيق.

د. ثروت محمد عبد المنعم

المحتويات

الصفحة

الباب الرابع: التوزيع التقريبي للإحصاء الترتيبي

الباب الخامس: تقديرات تعتمد علي الإحصاءات الترتيبية

الباب السادس: تقدير الفترة لمعالم بعض التوزيعات بالاعتماد على الإحصاءات الترتيبية.

الباب السابع: الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية مستقلة وغير متطابقة التوزيع

الباب الأول

مفاهيم أساسية

(١-١) مقدمة:

يتناول هذا الباب أهم التعاريف والمفاهيم الاساسية فى الإحصاءات الترتيبية. الـتى سـيحتاجها القارئ عند دراسة هذا الكتاب الإحصاءات الترتيبية هي عناصر عينة عشوائية مرتبة من الأصغر إلى الأكبر. وفي أغلب مناقشتنا للإحصاءات الترتيبية سوف نعتبر العينة العشوائية تتبع توزيعات متصلة.

مثال (١-١-١):

إذا كانـت $x_1 = .62 \quad , \quad x_2 = .98 \quad , \quad x_3 = .31 \quad , \quad x_4 = .81 \quad , \quad x_5 = .53$

قيم مشاهدة من خمس محاولات مستقلة لتجربة ما فإن قيم الإحصاءات الترتيبية هي:

$$y_1 = .31 < y_2 = .53 < y_3 = .62 < y_4 = .81 < y_5 = .98,$$

والقيمة الوسطى بعد ترتيب العناصر هي $.62$ وتسمى وسيط العينة بينما الفرق بين أكبر قيمـة وأصغر قيمة هو $y_5 - y_1 = .98 - .31 = .67$، يسمى مدى العينة.

تعريف (١-١-١):

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عناصر عينة عشوائية من الحجم n مختارة من توزيع احتمالي متصل وله دالة كثافة احتمالية $f(x)$ فإن المتغيرات العشوائية:

$$Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n ,$$

تسمى الإحصاءات الترتيبية لتلك العينة حيث:

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \text{Smallest of } X_1, X_2, \ldots, X_n , \\
Y_2 &= \text{Second of } X_1, X_2, \ldots, X_n , \\
&\vdots \\
Y_n &= \text{Largest of } X_1, X_2, \ldots, X_n ,
\end{aligned}$$

عمومـــا Y_r $(r = 1, 2, \cdots, n)$ يـــسمى الإحـــصاء التـــرتيبي مـــن الرتبـــة r للعينـــة العشوائية $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

نظرية (١-١-١):

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ تعطى كالتالي:

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{cases} n! f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_n) & , \quad a < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < b, \\ 0 & , \quad \text{(elsewhere) e.w.} \end{cases}$$

حيث $b \to \infty, a \to -\infty$.

البرهان:

سنبرهن النظرية في الحالة الخاصة عندما $n = 3$ ولكنها ستكون صحيحة لأي n ولتكن X_1, X_2, X_3 متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة (i, i, d) ولها دالة كثافة احتمال $f(x)$ وعلى ذلك فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لها هي:

$$g(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} f(x_1)f(x_2)f(x_3) & , \quad a < x_1, x_2, x_3 < b, \\ 0 & , \quad e.w, \end{cases}$$

وبالتالي فإن احتمال الحادثة $a < X_1 = X_2 < b$, $a < X_3 < b$ يعطى من التكامل التالي:

$$P(a < X_1 = X_2 < b \, , a < X_3 < b) = \int_a^b \int_a^b \int_{x_2}^{x_2} f(x_1)f(x_2)f(x_3)dx_1dx_2dx_3 = 0,$$

حيث:

$$\int_{x_2}^{x_2} f(x_1)dx_1 = 0.$$

وبنفس الطريقة سنجد أن احتمال تساوي أي متغيرين يساوي الصفر، وبالتالي يمكن كتابة فضاء العينة R كإتحاد للفئات المانعة والشاملة الستة التالية:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \quad ; \quad a < x_1 < x_2 < x_3 < b\}, \\ A_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \quad ; \quad a < x_2 < x_1 < x_3 < b\}, \\ A_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \quad ; \quad a < x_1 < x_3 < x_2 < b\}, \\ A_4 &= \{(x_1, x_2, x_3) \quad ; \quad a < x_2 < x_3 < x_1 < b\}, \\ A_5 &= \{(x_1, x_2, x_3) \quad ; \quad a < x_3 < x_1 < x_2 < b\}, \\ A_6 &= \{(x_1, x_2, x_3) \quad ; \quad a < x_3 < x_2 < x_1 < b\}. \end{aligned}$$

نجد أنها $6 = 3!$ فئات وهو مساوي لعدد طرق ترتيب X_1, X_2, X_3 من الأصغر إلى الأكبر، ولو أخذنا التحويلة الأحادية:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \text{Minimum}\,(X_1, X_2, \ldots, X_n), \\ Y_2 &= \text{Middle}(X_1, X_2, \ldots, X_n), \\ Y_3 &= \text{Maximum}\,(X_1, X_2, \ldots, X_n), \end{aligned}$$

والتي تأخذ الحوادث $A_1, A_2, \ldots, A_6$ إلى الفضاء $R' = \{(y_1, y_2, y_3), a < y_1 < y_2 < y_3 < b\}$ لأن:

$$A_1 \quad : y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3,$$
$$A_2 \quad : y_1 = x_2, \quad y_2 = x_1, \quad y_3 = x_3,$$
$$A_3 \quad : y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_2,$$
$$A_4 \quad : y_1 = x_2, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_1,$$
$$A_5 \quad : y_1 = x_3, \quad y_2 = x_1, \quad y_3 = x_2,$$
$$A_6 \quad : y_1 = x_3, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_1.$$

والتحويلة العكسية لهذه الدوال هي:

$$A_1 \quad : x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = y_3,$$
$$A_2 \quad : x_2 = y_1, \quad x_1 = y_2, \quad x_3 = y_3,$$
$$A_3 \quad : x_1 = y_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_2 = y_3,$$
$$A_4 \quad : x_2 = y_1, \quad x_3 = y_2, \quad x_1 = y_3,$$
$$A_5 \quad : x_3 = y_1, \quad x_1 = y_2, \quad x_2 = y_3,$$
$$A_6 \quad : x_3 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_1 = y_3.$$

ومنها يمكن حساب الجاكوبيان:

$$J_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = J_3 = J_4 = J_5 = J_6 = 1.$$

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية الثلاثة هي:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, y_3) &= |J_1|\, f(y_1)\, f(y_2)\, f(y_3) \\ &\quad + |J_2|\, f(y_1)\, f(y_2)\, f(y_3) + \cdots \\ &\quad + |J_6|\, f(y_1)\, f(y_2)\, f(y_3). \end{aligned}$$

$$\therefore g(y_1, y_2, y_3) = \begin{cases} 3!\, f(y_1)\, f(y_2)\, f(y_3) & , \quad a < y_1 < y_2 < y_3 < b \\ 0 & , \quad e.w, \end{cases}$$

والمعادلة السابقة تدل على إن الإحصاءات الترتيبية لعناصر العينة العشوائية غير مستقلة إحصائياً.

مثال (١-١-٢):

في حالة التوزيع المنتظم القياسي والذي له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < x < 1, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ تعطى كالتالي:

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{cases} n! & , \quad 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < 1, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

وفي حالة التوزيع الاسي القياسي والذي له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad 0 < x, \\ 0 & , \quad e.w, \end{cases}$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ تعطى كالتالي:

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{cases} n!\, e^{-\sum_{i=1}^{n} y_i} & , \quad 0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \infty, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

مثال (١-١-٣):

ليكن X متغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمال $f(x)$ متصلة وموجبة في الفترة $a < x < b$ وَصفر $(e.w)$. و $F(x)$ دالة التوزيع التجميعي وَتكتب كالتالي:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_a^x f(w)dw & , \quad & a < x < b, \\ &= 0 & , \quad & x \le a, \\ &= 1 & , \quad & x \ge b. \end{aligned}$$

وحيث أن $F'(x) = f(x)$، فإنه لكل $a < x < b$ تكون:

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= F(b) - F(x) \\ &= \int_a^b f(w)dw - \int_a^x f(w)dw \\ &= \int_x^b f(w)dw. \end{aligned}$$

مثال (١-١-٤):

ليكن X متغير عشوائي متصل له دالة كثافة احتمال $f(x)$ متصلة وموجبة في الفترة $a < x < b$ وَصفر $(e.w)$. و $F(x)$ دالة التوزيع التجميعي وَتكتب كالتالي:

$$F(x)=\int_a^x f(w)dw \qquad a<x<b,$$
$$=0 \qquad x\le a,$$
$$=1 \qquad x\ge b.$$

وهناك وسيط وحيد للتوزيع يحقق المعادلة $F(u)=\frac{1}{2}$. ولتكن X_1,X_2,X_3 عينة عشوائية من هذا التوزيع الاحتمالي حيث $Y_1<Y_2<Y_3$ الإحصاءات الترتيبية للعينة. والمطلوب حساب احتمال إن $Y_2\le u$. دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية الثلاثة هي:

$$g(y_1,y_2,y_3)=\begin{cases}6\,f(y_1)\,f(y_2)\,f(y_3) & , \quad a<y_1<y_2<y_3<b,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

ومنه يمكن حساب دالة الكثافة الاحتمالية لـــY_2 كالتالي:

$$g_2(y_2)=\int_{y_2}^{b}\int_{a}^{y_2} g(y_1,y_2,y_3)dy_1dy_3$$
$$=\int_{y_2}^{b}\int_{a}^{y_2} 6f(y_1)f(y_2)f(y_3)dy_1dy_3$$
$$=6f(y_2)\int_{y_2}^{b} f(y_3)\left[\int_a^{y_2} f(y_1)dy_1\right]dy_3$$
$$=6f(y_2)F(y_2)\int_{y_2}^{b} f(y_3)\,dy_3.$$

$$\therefore g_2(y_2)=\begin{cases}6f(y_2)F(y_2)\left[1-F(y_2)\right] & , \quad a<y_2<b,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

وبالتالي فإن:

$$P(Y_2\le u)=\int_a^u 6f(y_2)F(y_2)\left[1-F(y_2)\right]dy_2$$
$$=6\int_a^u\left[f(y_2)F(y_2)-f(y_2)\left[F(y_2)\right]^2\right]dy_2$$
$$=6\left[\frac{\left[F(y_2)\right]^2}{2}-\frac{\left[F(y_2)\right]^3}{3}\right]_a^u$$
$$=6\left[\frac{\left[F(u)\right]^2}{2}-\frac{\left[F(u)\right]^3}{3}\right]-6\left[\frac{\left[F(a)\right]^2}{2}-\frac{\left[F(a)\right]^3}{3}\right].$$

وحيث أن $F(a)=0$ فإن:

$$P(Y_2 \le u) = 6\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]$$
$$= 6\left[\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right] = \frac{1}{2}.$$

الإجراء المستخدم في المثال السابق يمكن استخدامه لاشتقاق صيغة لدالة كثافة الاحتمال الهامشية للإحصاءات الترتيبية.

(١-٢) التوزيعات الهامشية والمشتركة للإحصاءات الترتيبية:

نحتاج التوزيعات الهامشية للإحصاءات الترتيبية لإيجاد توزيع بعض الإحصاءات الأساسية مثل توزيع الوسيط وتوزيع أصغر وأكبر القيم أما التوزيعات المشتركة لأثنين أو أكثر من الإحصاءات الترتيبية فلها أهمية في إيجاد توزيع مدى العينة $W = Y_n - Y_1$ وَ المدى المتوسط $Z = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_n)$ والتي تستخدم في الكثير من التطبيقات.

نظرية (١-٢-١):(توزيع أكبر القيم)

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عناصر عينة عشوائية من الحجم n مسحوبة من توزيع احتمالي متصل وله دالة كثافة احتمالية $f(x)$ وكانت المتغيرات العشوائية $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ تمثل الإحصاءات الترتيبية لتلك العينة. عندها فإن Y_n الإحصاء الأكبر وله دالة كثافة الاحتمال الهامشية:

$$g_n(y_n) = \begin{cases} n\, f(y_n)\left[F(y_n)\right]^{n-1} &, \quad a < y_n < b, \\ 0 &, \quad e.w. \end{cases}$$

البرهان:

يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال الهامشية للإحصاء Y_n بمكاملة دالة الكثافة المشتركة $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ على المتغيرات $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ كالتالي:

$$g_n(y_n) = \int_a^{y_n} \cdots \int_a^{y_4} \int_a^{y_3} \int_a^{y_2} g(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_1\, dy_2\, dy_3 \cdots dy_{n-1}$$
$$= n!\, f(y_n) \int_a^{y_n} \cdots \int_a^{y_4} \int_a^{y_3} \int_a^{y_2} f(y_1) f(y_2) \cdots f(y_{n-1})\, dy_1\, dy_2\, dy_3 \cdots dy_{n-1}$$
$$= n!\, f(y_n) \int_a^{y_n} f(y_{n-1}) \cdots \int_a^{y_4} f(y_3) \int_a^{y_3} f(y_2) \left[\int_a^{y_2} f(y_1)\, dy_1\right] dy_2\, dy_3 \cdots dy_{n-1}$$

$$= n!\, f(y_n)\int_a^{y_n} f(y_{n-1})\cdots \int_a^{y_4} f(y_3)\left[\int_a^{y_3} f(y_2)\, F(y_2)dy_2\right]dy_3\cdots dy_{n-1}$$

$$= n!\, f(y_n)\int_a^{y_n} f(y_{n-1})\cdots \left[\int_a^{y_4} f(y_3)\frac{[F(y_3)]^2}{2}dy_3\right]\cdots dy_{n-1}$$

$$= n!\, f(y_n)\int_a^{y_n} f(y_{n-1})\cdots \left[\int_a^{y_5} f(y_4)\frac{[F(y_4)]^3}{2\cdot 3}dy_4\right]\cdots dy_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$= n!\, f(y_n)\frac{[F(y_n)]^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\therefore g_n(y_n) = \begin{cases} n\, f(y_n)[F(y_n)]^{n-1} & ,\quad a < y_n < b, \\ 0 & ,\quad \text{e.w.} \end{cases}$$

نظرية (١-٢-٢):(توزيع أصغر القيم)

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عناصر عينة عشوائية من الحجم n مسحوبة من توزيع احتمالي متصل وله دالة كثافة احتمالية $f(x)$ وكانت المتغيرات العشوائية $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لتلك العينة. عندها فإن Y_1 الإحصاء الأصغر وله دالة كثافة الاحتمال الهامشية:

$$g_1(y_1) = \begin{cases} n\, f(y_1)[1 - F(y_1)]^{n-1} & ,\quad a < y_1 < b, \\ 0 & ,\quad \text{e.w.} \end{cases}$$

البرهان:

$$g_1(y_1) = n!f(y_1)\int_{y_1}^{b}\cdots\int_{y_{n-3}}^{b}\int_{y_{n-2}}^{b}\int_{y_{n-1}}^{b} f(y_2)\cdots f(y_{n-1})f(y_n)dy_n\, dy_{n-1}\cdots dy_2$$

$$= n!f(y_1)\int_{y_1}^{b} f(y_2)\cdots \int_{y_{n-3}}^{b} f(y_{n-2})\int_{y_{n-2}}^{b} f(y_{n-1})\left[\int_{y_{n-1}}^{b} f(y_n)dy_n\right]dy_{n-1}\cdots dy_2$$

$$= n!f(y_1)\int_{y_1}^{b} f(y_2)\cdots \int_{y_{n-3}}^{b} f(y_{n-2})\left[\int_{y_{n-2}}^{b} f(y_{n-1})[1 - F(y_{n-1})]dy_{n-1}\right]dy_{n-2}\cdots dy_2$$

$$= n!f(y_1)\int_{y_1}^{b} f(y_2)\cdots\left[\int_{y_{n-3}}^{b} f(y_{n-2})\frac{[1 - F(y_{n-2})]^2}{2}dy_{n-2}\right]\cdots dy_2$$

$$= n!f(y_1)\int_{y_1}^{b} f(y_2)\cdots\left[\int_{y_{n-4}}^{b} f(y_{n-3})\frac{[1-F(y_{n-3})]^3}{2\cdot 3}dy_{n-3}\right]\cdots dy_2$$

$$\vdots$$

$$= n!f(y_1)\frac{[1-F(y_1)]^{n-1}}{(n-1)!}.$$

$$\therefore\ g_1(y_1)=\begin{cases} n\ f(y_1)[1-F(y_1)]^{n-1} & ,\quad a<y_1<b, \\ 0 & ,\quad e.w. \end{cases}$$

ويمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعي للمتغير Y_1 وهي:

$$F_{1:n}(y_1)=\int_{a}^{y_1} g_1(x)dx$$

$$=\int_{a}^{y_1} n\,f(x)[1-F(x)]^{n-1}dx$$

$$=-[1-F(x)]^n\Big|_a^{y_1}.$$

$$\therefore\ F_{1:n}(y_1)=\begin{cases} 0 & y_1\le a. \\ 1-[1-F(y_1)]^n & a<y_1<b, \\ 1 & y_1\ge b. \end{cases}$$

وكذلك دالة التوزيع لـ Y_n هي:

$$F_{n:n}(y_n)=\int_{a}^{y_n} g_n(x)dx$$

$$=n\int_{a}^{y_n} f(x)[F(x)]^{n-1}dx$$

$$=[F(x)]^n\Big|_a^{y_n}.$$

$$F_{n:n}(y_n)=\begin{cases} 0 & y_n\le a, \\ [F(y_n)]^n & a<y_n<b, \\ 1 & y_n\ge b. \end{cases}$$

نلاحظ أننا اعتمدنا على المثال (١-١-٣) في التكاملات وباستخدام نفس الإجراء يمكننا إيجاد توزيع أي إحصاء ترتيبي Y_r $(r=1,2,\cdots,n)$ كما في النظرية التالية:

نظرية (١-٢-٣):

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عناصر عينة عشوائية من الحجم n مسحوبة من توزيع احتمالي متصل وله دالة كثافة احتمالية $f(x)$ وكانت المتغيرات العشوائية $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لتلك العينة. عندها فإن أي إحصاء Y_r $(r = 1, 2, \cdots, n)$ له دالة كثافة الاحتمال الهامشية:

$$g_r(y_r) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(y_r)\left[F(y_r)\right]^{r-1}\left[1-F(y_r)\right]^{n-r} & , \quad a < y_r < b, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

البرهان:

لاحظ إننا سنكامل على مجموعة المتغيرات $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}, y_{r+1}, \ldots, y_n$ لذلك سنقسمها إلى مجموعتين. نجري التكامل بداءً بالمتغير y_n نزولاً لغاية المتغير y_{r+1} ($n-r$ من المتغيرات)، ومن ثم نكامل بداء بالمتغير y_1 صعوداً لغاية المتغير y_{r-1} ($r-1$ من المتغيرات) أذن:

$$g_r(y_r) = n!\, f(y_r) \int_a^{y_r} \cdots \int_a^{y_3}\int_a^{y_2} \cdot \int_{y_r}^{b} \cdots \int_{y_{n-2}}^{b}\int_{y_{n-1}}^{b} f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_{r-1})f(y_{r+1})\cdots f(y_n)$$
$$dy_n\, dy_{n-1} \cdots dy_{r+1} \cdot dy_1\, dy_2 \cdots dy_{r-1}$$

$$= n!\, f(y_r) \int_a^{y_r} \cdots \int_a^{y_3}\int_a^{y_2} f(y_{r-1})\cdots f(y_2) f(y_1)\, dy_1\, dy_2 \cdots dy_{r-1}$$
$$\int_{y_r}^{b} \cdots \int_{y_{n-2}}^{b}\int_{y_{n-1}}^{b} f(y_{r+1})\cdots f(y_n)\, dy_n\, dy_{n-1} \cdots dy_{r+1}$$

$$= n!\, f(y_r) \frac{\left[F(y_r)\right]^{r-1}}{(r-1)!} \; \frac{\left[1-F(y_r)\right]^{n-r}}{(n-r)!}.$$

$$\therefore g_r(y_r) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(y_r)\left[F(y_r)\right]^{r-1}\left[1-F(y_r)\right]^{n-r} & , \quad a < y_r < b, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

نظرية (١-٢-٤):

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عناصر عينة عشوائية من الحجم n مسحوبة من توزيع احتمالي متصل وله دالة كثافة احتمالية $f(x)$ وكانت المتغيرات العشوائية $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لتلك العينة. عندها فإن أي إحصاءين Y_i, Y_j بحيث $i < j$ ، $i, j = 1, 2, \cdots, n$ لهما دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$g_{ij}(y_i,y_j)=\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}\,f(y_i)\,f(y_j)\left[F(y_i)\right]^{i-1}$$
$$\left[F(y_j)-F(y_i)\right]^{j-i-1}\left[1-F(y_j)\right]^{n-j}\quad,\quad a<y_i<y_j<b,$$
$$=0\qquad\qquad,\quad e.w.$$

البرهان:

سنعتمد في البرهان على نفس أسلوب النظريات السابقة إلى جانب التكامل التالي:

$$\int_x^y\left[F(y)-F(w)\right]^{r-1}f(w)dw=-\frac{\left[F(y)-F(w)\right]^r}{r}\Bigg|_x^y$$
$$=\frac{\left[F(y)-F(x)\right]^r}{r},$$

لاحظ إننا سنكامل على مجموعة المتغيرات:

$$y_1,y_2,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots,y_{j-1},y_{j+1},\ldots,y_n.$$

سنجري التكامل بداءً بالمتغير y_n نزولاً لغاية المتغير y_{j+1} ($n-j$ من المتغيرات)، ومن ثم نكامل بداءً بالمتغير y_{j-1} نزولاً لغاية المتغير y_{i+1} ($j-i-1$ من المتغيرات)، ومن ثم نكامل بداء بالمتغير y_1 صعوداً لغاية المتغير y_{i-1} ($i-1$ من المتغيرات).

$$g_{ij}(y_i,y_j)=n!\,f(y_i)f(y_j)\int_a^{y_i}\cdots\int_a^{y_2}\int_{y_i}^{y_j}\cdots\int_{y_{j-2}}^{y_j}\int_{y_j}^{b}\cdots\int_{y_{n-1}}^{b}$$
$$f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_{i-1})f(y_{i+1})\cdots f(y_{j-1})f(y_{j+1})\cdots f(y_n)$$
$$dy_n\cdots dy_{j+1}\;dy_{j-1}\cdots dy_{i+1}\;dy_1\cdots dy_{i-1}\,.$$

$$\therefore g_{ij}(y_i,y_j)=n!\,f(y_i)f(y_j)\int_a^{y_i}\cdots\int_a^{y_2}f(y_{i-1})\cdots f(y_1)dy_1\cdots dy_{i-1}$$
$$\int_{y_i}^{y_j}\cdots\int_{y_{j-2}}^{y_j}f(y_{i+1})\cdots f(y_{j-1})dy_{j-1}\cdots dy_{i+1}$$
$$\int_{y_j}^{b}\cdots\int_{y_{n-1}}^{b}f(y_{j+1})\cdots f(y_n)dy_n\cdots dy_{j+1}$$
$$=n!\,f(y_i)f(y_j)\,\frac{\left[F(y_i)\right]^{i-1}}{(i-1)!}\,\frac{\left[F(y_j)-F(y_i)\right]^{j-i-1}}{(j-i-1)!}\,\frac{\left[1-F(y_j)\right]^{n-j}}{(n-j)!}.$$

$$\therefore g_{ij}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} f(y_i)\, f(y_j)[F(y_i)]^{i-1}$$

$$[F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1}[1 - F(y_j)]^{n-j} \quad , \quad a < y_i < y_j < b,$$

$$= 0 \quad , \quad e.w.$$

وإذا فرضنا أن :

$$z_1 = i-1\ ,\ z_2 = j-i-1\ ,\ z_3 = n-j,$$

$$p_1 = F(y_i)\ ,\ p_2 = F(y_j) - F(y_i)\ ,\ p_3 = 1 - F(y_j),$$

ونجد أن $z_1 + z_2 + z_3 = n-2$ و $p_1 + p_2 + p_3 = 1$,

وعليه فإن:

$$g_{ij}(y_i, y_j) = n(n-1)\ \frac{(n-2)!}{z_1!\ z_2!\ z_3!} p_1^{z_1} p_2^{z_2} p_3^{z_3} f(y_i)\ f(y_j).$$

يلاحظ من الصيغة الأخيرة أن معامل $f(y_i)\ f(y_j)$ يمثل توزيع متعدد الحدود بثلاث متغيرات مضروب بالعدد $n(n-1)$.

مثال (١-٢-١):

لتكن $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_6$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها $n = 6$ سحبت من توزيع له دالة كثافة احتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad 0 < x < 2, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

أوجد:

(1) $g_r(y_r)$

(2) $g_1(y_1)$

(3) $g_6(y_6)$

(4) $g_{1,6}(y_1, y_6)$.

الحل:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0, \\ \frac{x}{2} & , \quad 0 < x < 2, \\ 1 & , \quad x \geq 2. \end{cases}$$

أذن :

$$(1)\quad g_r(y_r)=\frac{6!}{(r-1)!\,(6-r)!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y_r}{2}\right)^{r-1}\left(1-\frac{y_r}{2}\right)^{6-r}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{6!}{(r-1)!\,(6-r)!\,2^6}y_r^{\,r-1}(2-y_r)^{6-r} & , \quad 0<y_r<2,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

وعليه إذا كانت $r=1$ فإن:

$$(2)\quad g_1(y_1)=\begin{cases}\dfrac{6}{2^6}(2-y_1)^5 & , \quad 0<y_1<2,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

وعندما $r=6$ فإن:

$$(3)\quad g_6(y_6)=\begin{cases}\dfrac{6}{2^6}y_6^{\,5} & , \quad 0<y_6<2,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

$$(4)\quad g_{1,6}(y_1,y_6)=\frac{6!}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y_6}{2}-\frac{y_1}{2}\right)^4$$

$$=\begin{cases}\dfrac{30}{2^6}(y_6-y_1)^4 & , \quad 0<y_1<y_6<2,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

مثال (١-٢-٢):

لتكن X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع ذا توزيع بيتا بالمعلمتين $\alpha=2$, $\beta=1$ و بفرض أن $Y_1<Y_2<Y_3<Y_4<Y_5$ يمثل الاحصاءات الترتيبية لهذه العينة أوجد:

(١) توزيع القيمة العظمى ثم احسب توقع هذه القيمة.

(٢) توزيع القيمة الصغرى ثم احسب $P(Y_1<0.2)$.

(٣) توزيع القيمة الوسطى ثم أوجد تباين هذه القيمة.

(٤) التوزيع المشترك لـ Y_4,Y_2 ومعامل الارتباط $\rho_{2,4}$.

الحل :

$$f(x)=\begin{cases}2x & , \quad 0<x<1,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x \le 0,\\ x^2 & , \quad 0<x<1,\\ 1 & , \quad x \ge 1.\end{cases}$$

(١) توزيع القيمة العظمى هو:

$$g_5(y_5)=5(2y_5)(y_5)^4$$

$$=\begin{cases}10y_5^9 & , \quad 0<y_5<1,\\ 0 & , \quad \text{e.w.}\end{cases}$$

$$E(Y_5)=10\int_0^1 y_5^{10}\,dy_5=\frac{10}{11}\left[y_5^{11}\right]_0^1=\frac{10}{11}.$$

(٢) توزيع القيمة الصغرى هو:

$$g_1(y_1)=5(2\ y_1\ )\left[1-y_1^2\right]^4$$

$$=\begin{cases}10\ y_1(1-y_1^2)^4 & , \quad 0<y_1<1,\\ 0 & , \quad \text{e.w.}\end{cases}$$

$$P(Y_1<.2)=10\int_0^{.2} y_1(1-y_1^2)^4 dy_1$$

$$=-(1-y_1^2)^5\Big|_0^{.2}\ =.185.$$

(٣) توزيع القيمة الوسطى هو:

$$g_3(y_3)=\frac{5!}{2!\ 2!}(2y_3)\left(y_3^2\right)^2\left(1-y_3^2\right)^2$$

$$=\begin{cases}60\ y_3^5\ (1-y_3^2)^2 & , \quad 0<y_3<1,\\ 0 & , \quad \text{e.w.}\end{cases}$$

حساب $\mathrm{Var}(Y_3)$:

$$\mathrm{Var}(Y_3)=E(Y_3^2)-\left[E(Y_3)\right]^2,$$

$$E(Y_3)=\int_0^1 y_3\,g_3(y_3)dy_3$$

$$=60\int_0^1 y_3^6(1-y_3^2)^2\,dy_3$$

$$=60\int_0^1 y_3^6(1-2y_3^2+y_3^4)dy_3$$

$$= 60\int_0^1 (y_3^6 - 2y_3^8 + y_3^{10})dy_3$$

$$E(Y_3) = \frac{160}{231}.$$

$$E(Y_3^2) = \int_0^1 y_3^2 g_3(y_3)dy_3$$

$$= 60\int_0^1 y_3^7(1 - 2y_3^2 + y_3^4)dy_3$$

$$= 60\int_0^1 (y_3^7 - 2y_3^9 + y_3^{11})dy_3.$$

$$E(Y_3^2) = \frac{1}{2},$$

$$Var(Y_3) = \frac{1}{2} - \left(\frac{160}{231}\right)^2$$

$$= .0202.$$

(٤) التوزيع المشترك Y_4, Y_2 هو:

$$g_{2,4}(y_2, y_4) = \frac{5!}{1!\ 1!\ 1!}(2y_2)(2y_4)(y_2^2)(y_4^2 - y_2^2)(1 - y_4^2)$$

$$= \begin{cases} 480 y_2^3 y_4 (y_4^2 - y_2^2)(1 - y_4^2) & , \quad 0 < y_2 < y_4 < 1, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

لإيجاد $\rho_{2,4}$ (معامل الارتباط) نتبع الآتي:

$$\rho_{2,4} = \frac{\sigma_{2,4}}{\sigma_2 \sigma_4}$$

$$\sigma_{2,4} = E(Y_2 Y_4) - E(Y_2)E(Y_4)$$

وعلي ذلك لإيجاد $\rho_{2,4}$ نحسب $E(Y_2Y_4), E(Y_2), E(Y_4), \sigma_2, \sigma_4$. أولاً نوجد توزيع كلاً من Y_2, Y_4 على النحو التالي:

$$g_2(y_2) = \begin{cases} 40 y_2^3 \left(1 - y_2^2\right)^3 & , \quad 0 < y_2 < 1 \\ 0 & , \quad e.w, \end{cases}$$

$$g_4(y_4) = \begin{cases} 40 y_4^7 \left(1 - y_4^2\right) & , \quad 0 < y_4 < 1 \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

ومنها يمكن حساب:

$$E(Y_2)=\frac{128}{231} \quad , \quad E(Y_2^2)=\frac{1}{3} \quad , \quad \sigma_2=.1621=Var(Y_2),$$

$$E(Y_4)=\frac{80}{99} \quad , \quad E(Y_4^2)=\frac{2}{3} \quad , \quad \sigma_4=.1169=Var(Y_4),$$

$$E(Y_2Y_4)=480\int_0^1\int_0^{y_4} y_2^4\,y_4^2(y_4^2-y_2^2)(1-y_4^2)\,dy_2\,dy_4$$

$$=480\int_0^1\int_0^{y_4} y_4^2(1-y_4^2)(y_2^4y_4^2-y_2^6)\,dy_2\,dy_4$$

$$=480\int_0^1 y_4^2(1-y_4^2)\left(\frac{y_2^5y_4^2}{5}-\frac{y_2^7}{7}\right)_0^{y_4} dy_4$$

$$=480\int_0^1 y_4^2(1-y_4^2)\left(\frac{y_4^7}{5}-\frac{y_4^7}{7}\right)dy_4$$

$$=\frac{192}{7}\int_0^1(y_4^9-y_4^{11})dy_4=\frac{16}{35},$$

التغاير بين Y_2,Y_4 هو:

$$Cov(Y_2,Y_4)=E(Y_2Y_4)-E(Y_2)E(Y_4)$$

$$\sigma_{2,4}=\frac{16}{35}-\left(\frac{128}{231}\right)\left(\frac{80}{99}\right)$$

$$=0.00937,$$

معامل الارتباط هو

$$\rho_{2,4}=\frac{0.00937}{(.1621)(.1169)}=0.4944.$$

مثال (١-٢-٣):

للمثال السابق بفرض $n=4$ أوجد $P(Y_3>\frac{1}{2})$.

الحل :

$$g_3(y_3)=\frac{4!}{2!\,1!}(2y_3)\left(y_3^2\right)^2\left(1-y_3^2\right)$$

$$=\begin{cases}24\,y_3^5\,(1-y_3^2) & , \quad 0<y_3<1,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

$$P(Y_3 > \frac{1}{2}) = 24\int_{\frac{1}{2}}^{1} y_3^5\ (1-y_3^2)\,dy_3$$

$$= 24\int_{\frac{1}{2}}^{1} (y_3^5 - y_3^7)\,dy_3 = \frac{243}{256}.$$

مثال (١-٢-٤):

لتكن $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها $n = 5$ مأخوذة من توزيع له دالة كثافة احتمالية:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad 0 < x, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

برهن إن الإحصاءين $Z_1 = Y_2$ و $Z_2 = Y_4 - Y_2$ مستقلين إحصائياً.

الحل :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & , \quad 0 < x, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ Y_4, Y_2 تعطى من:

$$g_{2,4}(y_2, y_4) = \frac{5!}{1!1!1!} e^{-y_2} e^{-y_4} \left(1 - e^{-y_2}\right)\left(e^{-y_2} - e^{-y_4}\right)\left(e^{-y_4}\right)$$

$$= 120 e^{-y_2} e^{-2y_4} \left(1 - e^{-y_2}\right)\left(e^{-y_2} - e^{-y_4}\right) \quad , \quad 0 < y_2 < y_4 < \infty,$$

$$= 0 \quad , \quad e.w.$$

ولنعتبر التحويلة الأحادية:

$$T : z_1 = y_2 \quad , \quad z_2 = y_4 - y_2$$

عندها فإن التحويلة العكسية لها هي:

$$T^{-1} : y_2 = z_1 \quad , \quad y_4 = z_2 + z_1,$$

ومنها نحسب جاكوبيان التحويل:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

وطبقا لذلك فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ Z_1, Z_2 هي:

$$h(z_1, z_2) = 120\, e^{-z_1} e^{-2(z_1+z_2)} (1 - e^{-z_1})(e^{-z_1} - e^{-(z_1+z_2)})$$

$$= 120\, e^{-4z_1}(1 - e^{-z_1}) e^{-2z_2}(1 - e^{-z_2}) \quad , \quad 0 < z_1 < \infty, 0 < z_2 < \infty$$

$$= 0 \quad , \quad e.w.$$

ولإثبات الاستقلال يكفي برهان إن $h(z_1,z_2)=h_1(z_1)\cdot h_2(z_2)$ كالتالي:

$$h_1(z_1)=\int_0^{\infty} h(z_1,z_2)\,dz_2$$

$$=120\,e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})\int_0^{\infty} e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})\,dz_2$$

$$=120\,e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})\int_0^{\infty} (e^{-2z_2}-e^{-3z_2})\,dz_2$$

$$=120\,e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})\left[\frac{e^{-2z_2}}{-2}-\frac{e^{-3z_2}}{-3}\right]_0^{\infty}.$$

$$\therefore h_1(z_1) = 20\,e^{-4z_1}(1-e^{-z_1}),\quad 0<z_1<\infty,$$
$$=0\quad ,\quad e.w.$$

وبالمثل:

$$h_2(z_2)=\int_0^{\infty} h(z_1,z_2)\,dz_1$$

$$=120\,e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})\int_0^{\infty} e^{-4z_1}(1-e^{-z_1})\,dz_1$$

$$=120\,e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})\int_0^{\infty} (e^{-4z_1}-e^{-5z_1})\,dz_1$$

$$=120\,e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})\left[\frac{e^{-4z_1}}{-4}-\frac{e^{-5z_1}}{-5}\right]_0^{\infty}.$$

$$h_2(z_2)=6\,e^{-2z_2}(1-e^{-z_2})\quad ,\quad 0<z_2<\infty,$$
$$=0\quad ,\quad e.w.$$

نجد إن $h(z_1,z_2)=h_1(z_1)\cdot h_2(z_2)$ فعلاً وبالتالي فإنهما مستقلين إحصائياً.

مثال (١-٢-٥):

لتكن $Y_1<Y_2<Y_3$ الإحصائيات الترتيبية لعينة عشوائية من الحجم $n=3$ مأخوذة من توزيع له دالة كثافة احتمالية على الصورة:

$$f(x)=\begin{cases}1 & ,\quad 0<x<1,\\ 0 & ,\quad e.w.\end{cases}$$

اوجد دالة كثافة الاحتمال لمدى العينة $Z_1=Y_3-Y_1$.

الحل :

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0,\\ x & , \quad 0<x<1,\\ 1 & , \quad x\geq 1.\end{cases}$$

نجد أن دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لـ Y_3, Y_1 هي:

$$g_{1,3}(y_1,y_3)=\begin{cases}6(y_3-y_1) & , \quad 0<y_1<y_3<1,\\ 0 & , \quad \text{e.w.}\end{cases}$$

ولنعتبر التحويلة الأحادية:

$$T: z_2=y_3 \quad , \quad z_1=y_3-y_1,$$

عندها فإن التحويلة العكسية لها هي:

$$T^{-1}: y_3=z_2 \quad , \quad y_1=z_2-z_1,$$

ومنها نحسب جاكوبيان التحويل :

$$J=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

وطبقا لذلك فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ Z_1, Z_2 هي:

$$\begin{aligned}h(z_1,z_2)&=6\,(z_2-z_2+z_1)\\ &=6\,z_1 \quad , \quad 0<z_1<z_2<1,\\ &=0 \quad , \quad \text{e.w.}\end{aligned}$$

وطبقا لذلك فإن دالة كثافة الاحتمال لمدى العينة هي:

$$\begin{aligned}h_1(z_1)&=\int_{z_1}^{1}6\,z_1\,dz_2\\ &=6z_1(1-z_1) \quad , \quad 0<z_1<1,\\ &=0 \quad , \quad \text{e.w.}\end{aligned}$$

مثال (١-٢-٦):

للمثال السابق عندما $n=4$ أوجد دالة كثافة الاحتمال لـ Y_3 واحسب الاحتمال $P(\frac{1}{3}<Y_3<\frac{2}{3})$.

الحل :

$$n=4 \quad , \quad r=3,$$

$$g_3(y_3) = \frac{4!}{2!\,1!}(1)(y_3)^2(1-y_3)$$
$$= 12\,y_3^2(1-y_3) \quad , \quad 0 < y_3 < 1,$$
$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

$$P(\tfrac{1}{3} < Y_3 < \tfrac{2}{3}) = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} g_3(y_3)\,dy_3 = 12\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} y_3^2(1-y_3)\,dy_3$$
$$= 12\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (y_3^2 - y_3^3)\,dy_3$$
$$= \frac{13}{27}.$$

طريقة بديلة لإشتقاق التوزيعات الهامشية والمشتركة للاحصاءات الترتيبية:

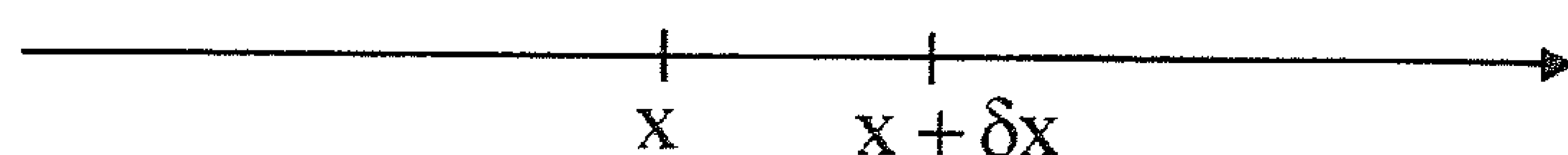
والآن نستطيع استخدام طريقة بسيطة جداً للحصول على التوزيعات الهامشية والمشتركة للإحصاءات الترتيبية بالاعتماد على نظرية الاحتمالات بدلاً من الطرق الرياضية البحتة. سنوضح التقنية المستخدمة بإعطاء مثال في حالة إحصاء ترتيبي واحد Y_r لعينة عشوائية تتبع توزيع متصل بدالة كثافة احتمال $f(x)$ ودالة توزيع تجميعي $F(x)$. من نظرية الاحتمالات يمكن تعريف دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ كالتالي:

$$f(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{F(x+\delta x) - F(x)}{\delta x}$$
$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{P(x < X < x+\delta x)}{\delta x},$$

وبتطبيق التعريف السابق على دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_r نحصل على:

$$g_r(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{P(x < Y_r < x+\delta x)}{\delta x} \quad , \quad (x = y_r).$$

ولنفترض أننا قسمنا المحور X إلى ثلاث فترات كالتالي:

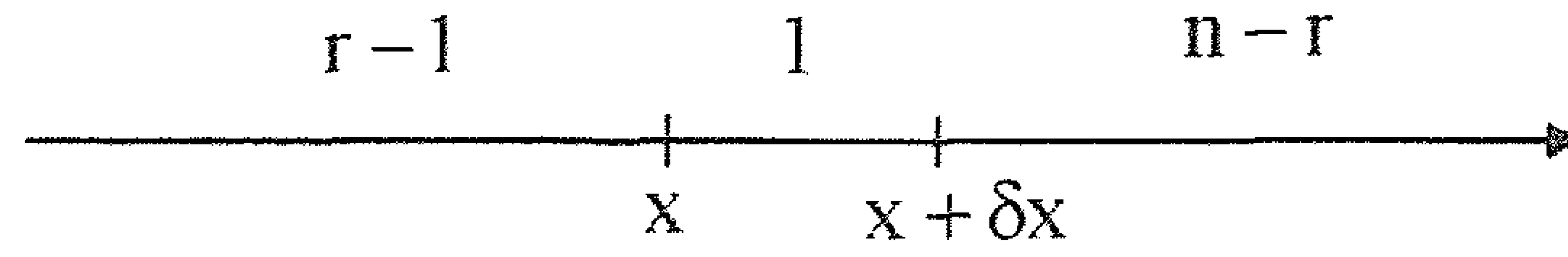


$$I_1 = (-\infty, x],$$
$$I_2 = (x, x+\delta x],$$
$$I_3 = (x+\delta x, \infty),$$

ولنعتبر الحادثة:

$$x < Y_r < x + \delta x$$

إذا ما كان δx صغيرة كفاية بحيث تكون إمكانية وقوع اثنين (أو أكثر) من X_i في الفتـــرة I_2 مستحيلة، فإنه يمكن القول إن $(r-1)$ من المتغيرات X_i تقع في الفترة I_1 وتحقق إن $X_i \leq x$، بينما متغير واحد يقع في الفترة I_2، و $(n-r)$ من المتغيرات X_i تقع في الفترة I_3.



عندها فإن طرق ترتيب المتغيرات في الفترات الثلاث السابقة هي:

$$\frac{n!}{(r-1)!\,1!\,(n-r)!}.$$

بينما كل طريقة لها الاحتمال:

$$[F(x)]^{r-1}[F(x+\delta x)-F(x)][1-F(x+\delta x)]^{n-r},$$

لأن احتمال وقوع أي من المتغيرات العشوائية في أحدى الفترات الثلاث هي:

$$P(X_i \leq x) = F(x),$$
$$P(x < X_i < x+\delta x) = F(x+\delta x) - F(x),$$
$$P(X_i \geq x+\delta x) = 1 - F(x+\delta x).$$

وحيث إن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات مستقلة ومتطابقة فإن:

$$P(x < Y_r < x+\delta x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$$
$$[F(x)]^{r-1}[F(x+\delta x)-F(x)][1-F(x+\delta x)]^{n-r},$$

وبالتالي فإن:

$$g_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(x)]^{r-1}$$
$$\lim_{\delta x \to 0}\frac{[F(x+\delta x)-F(x)]}{\delta x}\lim_{\delta x \to 0}[1-F(x+\delta x)]^{n-r}$$
$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(x)]^{r-1} f(x)[1-F(x)]^{n-r}.$$

وهي نفس النتيجة التي وصلنا إليها باستخدام الطرق الرياضية البحتة.

مثال (١-٢-٧):

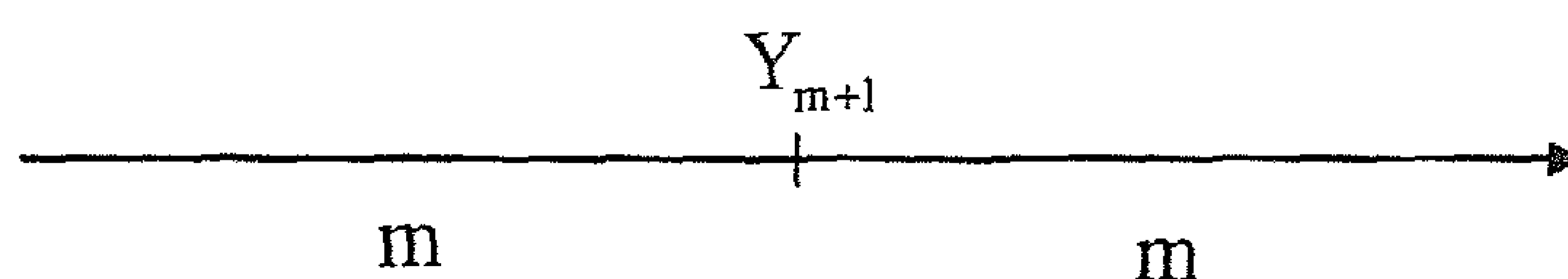
لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_{2m+1}$ عينة عشوائية من التوزيع المنتظم القياسي، أوجـــد دالـــة الكثافـــة الاحتمالية للوسيط. ($2m+1 = n$, n فرديه و m عدد صحيح موجب).

الحل:

وسيط العينة هو الإحصاء الترتيبي Y_{m+1} وحيث:

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0<x<1,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x<0,\\ x & , \quad 0<x<1,\\ 1 & , \quad x\geq 1.\end{cases}$$



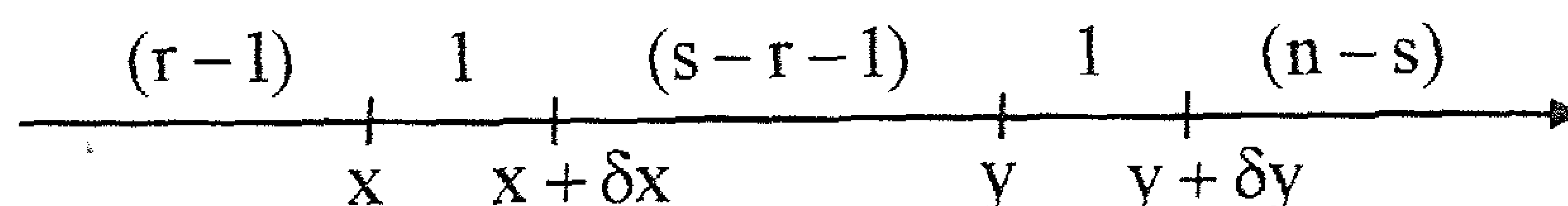
$$\therefore g_{m+1}(x) = \frac{(2m+1)!}{m!\ m!}x^m(1-x)^m \qquad , \quad 0<x<1,$$
$$=0 \qquad , \quad e.w.$$

لاحظ إن $g_{m+1}(x)$ تمثل دالة كثافة احتمال لتوزيع بيتا بالمعالم $\beta = m+1, \alpha = m+1$.

وبالمثل يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة لزوج من الإحصاءات الترتيبية. وليكن Y_r, Y_s حيث $r<s$ إحصاءين ترتيبيين لعينة عشوائية تتبع توزيع متصل بدالة كثافة احتمال $f(x)$ ودالة توزيع تجميعي $F(x)$، عندها فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ Y_r, Y_s يمكن إيجادها كالتالي:

$$g_{r,s}(x,y) = \lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}} \frac{P(x<Y_r<x+\delta x, y<Y_s<y+\delta y)}{\delta x\,\delta y},$$

حيث يمكن تقسيم المحور X إلى خمس فترات كالتالي:



$$I_1 = (-\infty, x],$$
$$I_2 = (x, x+\delta x],$$
$$I_3 = (x+\delta x, y],$$
$$I_4 = (y, y+\delta y],$$
$$I_5 = (y+\delta y, \infty).$$

ولنعتبر الحادثة:

$$x<Y_r<x+\delta x \ , \ y<Y_s<y+\delta y.$$

وعندما تكون $\delta y, \delta x$ صغيرتان كفاية بحيث إن إمكانية وقوع اثنين أو أكثر من المتغيرات X_i في الفترة I_2 أو I_4 مستحيلة، عندها يمكن القول إن $(r-1)$ من المتغيرات X_i تقع في الفترة I_1 وتحقق إن $X_i \leq x$، بينما متغير واحد يقع في الفترة I_2، و $(s-r-1)$ من المتغيرات X_i تقع في الفترة I_3، ومتغير واحد في الفترة I_4، و $(n-s)$ من المتغيرات X_i تقع في الفترة I_5 وطرق ترتيب المشاهدات على الفترات الخمس هي:

$$\frac{n!}{(r-1)!\,1!\,(s-r-1)!\,1!\,(n-s)!}.$$

بينما كل طريقة لها الاحتمال:

$$[F(x)]^{r-1}[F(x+\delta x)-F(x)][F(y)-F(x+\delta x)]^{s-r-1}$$
$$[F(y+\delta y)-F(y)][1-F(y+\delta y)]^{n-s}.$$

لأن احتمال وقوع أي من المتغيرات العشوائية في أحدى الفترات الخمس هي:

$$P(X_i \leq x) = F(x),$$
$$P(x < X_i < x+\delta x) = F(x+\delta x) - F(x),$$
$$P(x+\delta x < X_i < y) = F(y) - F(x+\delta x),$$
$$P(y < X_i < y+\delta y) = F(y+\delta y) - F(y),$$
$$P(X_i \geq y+\delta y) = 1 - F(y+\delta y).$$

وحيث إن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات مستقلة ومتطابقة فإن:

$$P(x < Y_r < x+\delta x, y < Y_s < y+\delta y) = \frac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!}$$
$$[F(x)]^{r-1}[F(x+\delta x)-F(x)][F(y)-F(x+\delta x)]^{s-r-1}$$
$$[F(y+\delta y)-F(y)][1-F(y+\delta y)]^{n-s}.$$

ومنه فإن:

$$g_{r,s}(x,y) = \lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}} \frac{P(x < Y_r < x+\delta x, y < Y_s < y+\delta y)}{\delta x\, \delta y}$$
$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!}[F(x)]^{r-1} \lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}} \frac{[F(x+\delta x)-F(x)]}{\delta x}$$
$$\lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}} [F(y)-F(x+\delta x)]^{s-r-1} \lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}} \frac{[F(y+\delta y)-F(y)]}{\delta y}$$
$$\lim_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0}} [1-F(y+\delta y)]^{n-s}.$$

$$\therefore g_{r,s}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!}$$
$$[F(x)]^{r-1} f(x)[F(y)-F(x)]^{s-r-1} f(y)[1-F(y)]^{n-s}.$$

وهي أيضاً نفس النتيجة التي توصلنا إليها باستخدام الطرق الرياضية البحتة. ولكن هذه الطريقة أكثر مرونة ويمكن استخدامها لإيجاد دالة الكثافة المشتركة لأكثر من إحصاءين ترتيبيان. وبشكل عام لأي $k \le n$ نستطيع إيجاد دالة كثافة الاحتمال لأي k من الإحصاءات الترتيبية بتقسيم المحور X لـ $2k+1$ من الفترات وإتباع نفس الخطوات فنحصل على دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ $Y_{n_1}, Y_{n_2}, \ldots, Y_{n_k}$ حيث $1 \le k \le n$, $1 \le n_1 < n_2 < \ldots < n_k \le n$ وذلك كالتالي:

$$g_{n_1,n_2,\cdots,n_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \frac{n!}{(n_1-1)!\,(n_2-n_1-1)!\cdots(n-n_k)!}$$
$$[F(x_1)]^{n_1-1} f(x_1)[F(x_2)-F(x_1)]^{n_2-n_1-1} f(x_2)\cdots$$
$$f(x_k)[1-F(x_k)]^{n-n_k} \quad , \quad a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_k \le b.$$

وباعتبار $x_0 = -\infty$, $x_{k+1} = \infty$, $n_0 = 0$, $n_{k+1} = n+1$ يمكننا كتابة:

$$g_{n_1,n_2,\cdots,n_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k) = n!\prod_{j=0}^{k} f(x_j)\frac{[F(x_{j+1})-F(x_j)]^{n_{j+1}-n_j-1}}{(n_{j+1}-n_j-1)!}$$
$$, \quad a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_k \le b.$$

ومن الصيغة السابقة يمكننا اشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لكل الإحصاءات الترتيبية وهي كالتالي:

$$g_{1,2,\cdots,n}(x_1,x_2,\ldots,x_n) = n!\prod_{j=0}^{n} f(x_j) \quad , \quad a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b.$$

(١-٣) أمثلة وتطبيقات على الإحصاءات الترتيبية:

(١-٣-١) اختبارات الحياة:

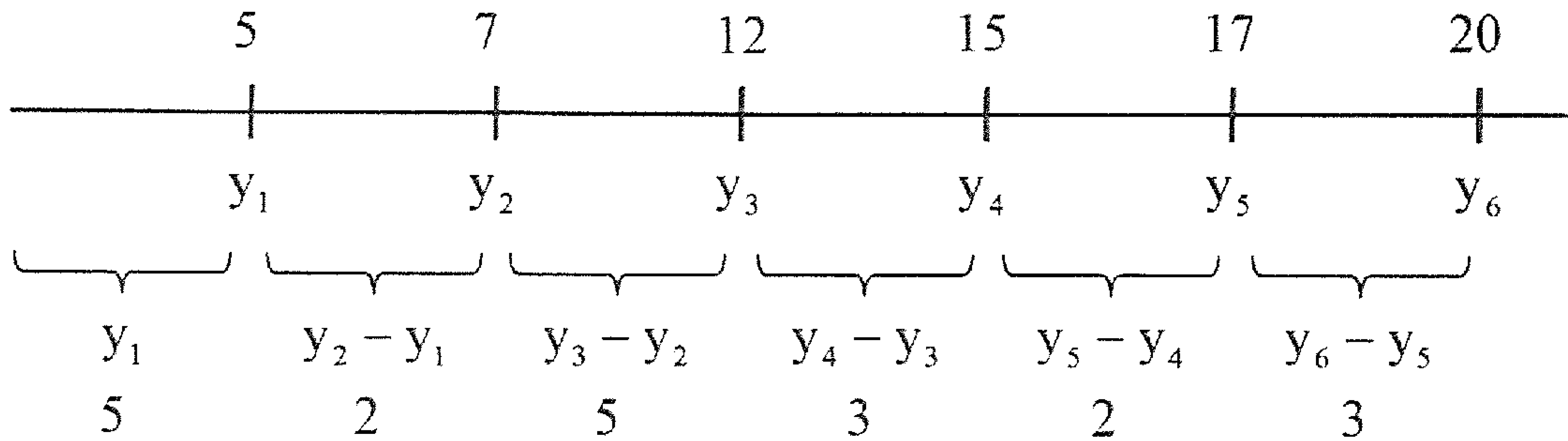
تستخدم الإحصاءات الترتيبية في الكثير من التطبيقات ولها أهمية بارزة في اختبارات الحياة، مثلاً إذا كان لدينا $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية تمثل زمن الحياة لـ n من الوحدات فإن الإحصاء الترتيبي Y_1 يمثل زمن الحياة للوحدة التي تفشل أولاً و Y_2 زمن الحياة للوحدة التي تفشل ثانياً وهكذا.

مثال (١-٣-١):

إذا كان لدينا 6 وحدات وتقوم التجربة على تسجيل زمن الفشل لكل وحدة وتنتهي التجربة بفشل الوحدة السادسة وكانت المشاهدات كما يلي:

$$5, 7, 12, 15, 17, 20.$$

لاحظ إن زمن الحياة الكلي لجميع الوحدات 76 وحدة زمنية .



لاحظ إن الزمن الكلي للحياة في الفترة الأولى $ny_1 = (6)(5) = 30$ حيث n من الوحدات تعمل في هذه الفترة.

الزمن الكلي للحياة لعدد $(n-1)$ من الوحدات في الفترة $y_2 - y_1$ هو:

$$(n-1)(y_2 - y_1) = (5)(2) = 10.$$

الزمن الكلي للحياة لعدد $(n-2)$ من الوحدات في الفترة $y_3 - y_2$ هو:

$$(n-2)(y_3 - y_2) = (4)(5) = 20.$$

الزمن الكلي للحياة لعدد $(n-3)$ من الوحدات في الفترة $y_4 - y_3$ هو:

$$(n-3)(y_4 - y_3) = (3)(3) = 9.$$

الزمن الكلي للحياة لعدد $(n-4)$ من الوحدات في الفترة $y_5 - y_4$ هو:

$$(n-4)(y_5 - y_4) = (2)(2) = 4.$$

الزمن الكلي للحياة لعدد $(n-5)$ من الوحدات في الفترة $y_6 - y_5$ هو:

$$(n-5)(y_6 - y_5) = (1)(3) = 3.$$

ويمكن تمثيل ذلك بالجدول التالي:

الفترة	5	7	12	15	17	20	المجموع
ny_1	5	5	5	5	5	5	30
$(n-1)(y_2-y_1)$		2	2	2	2	2	10
$(n-2)(y_3-y_2)$			5	5	5	5	20
$(n-3)(y_4-y_3)$				3	3	3	9
$(n-4)(y_5-y_4)$					2	2	4
$(n-5)(y_6-y_5)$						3	3
المجموع							76

ويمكن اعتبار $z_i=(n-i+1)(y_i-y_{i-1})$ مشاهدات لمتغيرات عشوائية تمثل زمن الحياة الكلي خلال الفترة من فشل الوحدة $i-1$ إلى فشل الوحدة i وتكتب بصورة عامة:

$$Z_i=(n-i+1)(Y_i-Y_{i-1}) \quad , \quad i=1,2,\ldots,n \quad , \quad Y_0=0$$

وفي المثال التالي سنبرهن إن هذه المتغيرات مستقلة ومتطابقة في حالة التوزيع الأسي.

مثال (١-٣-٢):

لتكن $X_1,X_2,\ldots,X_n$ عينة عشوائية حجمها n مسحوبة من توزيع أسي بمتوسط θ حيث.

$$f(x)=\frac{1}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta}) \quad ; \quad \theta>0 \quad , \quad x>0.$$

دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة للإحصاءات الترتيبية في العينة تعطى كالتالي:

$$g(y_1,y_2,\ldots,y_n)=n!f(y_1)f(y_2)\cdots f(y_n)$$

$$=n!\frac{1}{\theta^n}\exp(-\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{\theta}) \quad ; \quad 0<y_1<y_2<\cdots<y_n<\infty.$$

نعتبر التحويلة الأحادية:

$$Z_1=nY_1$$
$$Z_2=(n-1)(Y_2-Y_1)$$
$$Z_3=(n-2)(Y_3-Y_2)$$
$$\vdots$$
$$Z_i=(n-i+1)(Y_i-Y_{i-1}) \quad , \quad i=1,2,\ldots,n \quad , \quad Y_0=0$$

والتحويلة العكسية لها هي:

$$Y_i=\frac{Z_1}{n}+\frac{Z_2}{n-1}+\ldots+\frac{Z_i}{n-i+1} \quad , \quad i=1,2,\cdots,n,$$

ومنها نوجد جاكوبيان التحويل كالتالي:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial z_n}\\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial z_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial y_n}{\partial z_1} & \frac{\partial y_n}{\partial z_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial z_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{n} & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \cdots & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{n!}.$$

لاحظ إن $\sum_{i=1}^{n} Z_i=\sum_{i=1}^{n} Y_i$، لذا فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـــ Z_i و $(i=1,2,\cdots,n)$ تعطى كالتالي:

$$\begin{aligned}h(z_1,z_2,\ldots,z_n)&=\frac{1}{\theta^n}\exp[-\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{\theta}]\\ &=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\theta}\exp[-\frac{z_i}{\theta}]\right)\quad,\quad 0<z_i<\infty,\\ &=0\qquad\qquad\qquad ,\quad e.w.\end{aligned}$$

مما يعني إن المتغيرات Z_i متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة وكل منها يتبع التوزيع الاسي بالمعلمة θ. وسوف نستخدم لاحقا هذا المثال لاشتقاق عزوم الإحصائيات الترتيبية في الحالة الأسّية.

الآن ماذا لو كانت التجربة تقوم على اختبار زمن الحياة لـــ n من الوحدات بحيث نستبدل كل وحدة تفشل بوحدة أخرى. (سحب بإرجاع) عندها فإن هناك n من الوحدات تعمل في كل فتـــرة وزمن الحياة الكلي في الفترة من فشل الوحدة $i-1$ إلى فشل الوحدة i هو:

$$Z_i=n(Y_i-Y_{i-1})\quad,\quad i=1,2,\ldots,n\quad,\quad Y_0=0.$$

في حالة السحب بإرجاع فإنه يمكن تعريف المتغيرات التالية:

$$W_i=Y_i-Y_{i-1}\quad,\quad i=1,2,\ldots,n\quad,\quad Y_0=0$$

حيث W_i (i,i,d) وتتبع التوزيع الاسي بمعلمة $\frac{\theta}{n}$.

أما في حالة السحب بدون إرجاع فإنه يمكن الاعتماد على توزيع Z_i واستخدام التحويلة التاليـــة في إيجاد التوزيع W_i, $i=1,2,\ldots,n,$ حيث:

$$W_i=\frac{Z_i}{n-i+1}\quad,\quad i=1,2,\ldots,n\,,$$

وهي تحويلة أحادية والتحويلة العكسية لها هي:

$$Z_i = (n - i + 1)W_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل :

$$J = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = n!$$

$$\therefore h_Z(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{\theta}\exp(-z_1/\theta)\,\frac{1}{\theta}\exp(-z_2/\theta)\cdots\frac{1}{\theta}\exp(-z_n/\theta),$$

$$h_W(w_1, w_2, \ldots, w_n) = \frac{n}{\theta}\exp(-nw_1/\theta)\frac{n-1}{\theta}\exp(-(n-1)w_2/\theta)\cdots$$
$$\frac{1}{\theta}\exp(-w_n/\theta).$$

مما يعني إن المتغيرات $W_1, W_2, \ldots, W_n$ متغيرات عشوائية مستقلة وكل منها يتبع التوزيع الاسي ولكنها ليست متطابقة حيث:

$$W_i \sim E\,xp(\frac{\theta}{n - i + 1}).$$

لاحظ إن هناك فرق آخر بين إجراء التجربة بإرجاع أو بدون إرجاع. فالزمن الكلي لحياة الوحدات من بداء التجربة وحتى فشل الوحدة k في حالة السحب بدون إرجاع هو:

$$n\,Y_1 + (n-1)(Y_2 - Y_1) + \cdots + (n - k + 1)(Y_k - Y_{k-1}).$$

أما في حالة إجراء التجربة بإرجاع فإنه يساوي:

$$n\,Y_1 + n(Y_2 - Y_1) + \cdots + n(Y_k - Y_{k-1}) = nY_k\,.$$

مثال (١-٣-٣):

في اختبارات الحياة كثيراً ما تستخدم الإحصاءات الترتيبية كتقديرات لمعالم التوزيع ومثال على ذلك لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع له دالة كثافة الاحتمال

$$f(x) = \exp\left[-(x - \eta)\right] \quad , \quad x > \eta,$$
$$= 0 \qquad\qquad , \quad e.w.$$

ولنحاول إيجاد مقدر الإمكان الأكبر للمعلمة η كالتالي:

$$L = \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\eta\right] \quad , \quad x_i \geq \eta,$$
$$= 0 \qquad\qquad , \quad e.w.$$

$$\therefore \ln L = -\sum_{i=1}^{n} x_i + n\eta.$$

لاحظ إن الدالة $\ln L$ دالة خطية في المعلمة η لذا فإنها ليس لها نقاط حرجة ولكنها تزايدية وتأخذ أكبر قيمة لها عندما يكون لـ η أكبر قيمة وحيث إن:

$$\eta < x_1, x_2, \cdots, x_n.$$

ولذلك فإن المقدر للمعلمة η هو:

$$\hat{\eta} = Min(X_1, X_2, \cdots, X_n) = Y_1.$$

(١-٣-٢) المحاكاة:

لتكن $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية تمثل زمن حياة n من الوحدات وهو يتبع توزيع متصل له دالة كثافة احتمالية $f(x)$ ودالة التوزيع $F(x)$. إذا تم إجراء التجربة وأخذ المشاهدات بشكل ترتيبي حتى $k < n$ من المشاهدات لذا يكون من المثير للاهتمام محاكاة التجربة وذلك بتوليد بيانات تتبع التوزيع ومرتبة من الأصغر إلى الأكبر. سنحاول إيجاد الاحتمال الشرطي لـ Y_{i+1} بشرط $Y_i = y_i$

$$h(y_{i+1} \mid y_i) = \frac{g_{i,i+1}(y_i, y_{i+1})}{g(y_i)},$$

$$g_{i,i+1}(y_i, y_{i+1}) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i-1)!} f(y_i) f(y_{i+1}) \left[F(y_i)\right]^{i-1} \left[1 - F(y_{i+1})\right]^{n-i-1}$$

$$, \qquad a < y_i < y_{i+1} < b,$$

$$g_i(y_i) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(y_i) \left[F(y_i)\right]^{i-1} \left[1 - F(y_i)\right]^{n-i}.$$

وبالتالي فإن :

$$h(y_{i+1} \mid y_i) = \frac{g_{i,i+1}(y_i, y_{i+1})}{g(y_i)}$$

$$= (n-i) f(y_{i+1}) \frac{\left[1 - F(y_{i+1})\right]^{n-i-1}}{\left[1 - F(y_i)\right]^{n-i}} \qquad , \quad y_i < y_{i+1} < b.$$

ومنها يمكننا إيجاد دالة التوزيع للإحصاء Y_{i+1} بشرط $Y_i = y_i$ كالتالي:

$$H(y_{i+1} \mid y_i) = \frac{(n-i)}{[1-F(y_i)]^{n-i}} \int_{y_i}^{y_{i+1}} f(w)[1-F(w)]^{n-i-1} dw$$

$$= \frac{(n-i)}{[1-F(y_i)]^{n-i}} \left[-\frac{[1-F(w)]^{n-i}}{(n-i)} \right]_{y_i}^{y_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{[1-F(y_i)]^{n-i}} \left[[1-F(y_i)]^{n-i} - [1-F(y_{i+1})]^{n-i} \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{1-F(y_{i+1})}{1-F(y_i)} \right]^{n-i} \quad , \quad a < y_i < y_{i+1} < b.$$

ولتوليد البيانات نبدأ بتوليد المشاهدة الأولى باستخدام نظرية التكامل الاحتمالي حيث:

$$F_{1:n}(y_1) = 1 - [1-F(y_1)]^n .$$

وباعتبار:

$$v = F_{1:n}(y_1),$$

نجد إن V يتبع التوزيع المنتظم في الفترة $(0,1)$ ومن السهل الحصول على مشاهدات تتبع التوزيع المنتظم (من الجداول أو بالحاسوب) وإذا حصلنا على مشاهدة v يمكننا إيجاد y_1 كما يلي:

$$v = 1 - [1-F(y_1)]^n \;\Rightarrow\; 1-v = [1-F(y_1)]^n$$

$$\Rightarrow\; (1-v)^{\frac{1}{n}} = [1-F(y_1)]$$

$$\Rightarrow\; F(y_1) = 1-(1-v)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow\; y_1 = F^{-1}\left(1-(1-v)^{\frac{1}{n}}\right).$$

ومن ثم نقوم بتوليد المشاهدة y_{i+1} بالاعتماد على المشاهدة السابقة لها كالتالي:

$$v = H(y_{i+1} \mid y_i) \;\Rightarrow\; v = 1 - \left[\frac{1-F(y_{i+1})}{1-F(y_i)} \right]^{n-i}$$

$$\Rightarrow\; \left[\frac{1-F(y_{i+1})}{1-F(y_i)} \right]^{n-i} = 1-v$$

$$\Rightarrow\; \left[\frac{1-F(y_{i+1})}{1-F(y_i)} \right] = (1-v)^{\frac{1}{n-i}}$$

$$\Rightarrow \quad 1-F(y_{i+1})=[1-F(y_i)](1-v)^{\frac{1}{n-i}}$$

$$\Rightarrow \quad F(y_{i+1})=1-[1-F(y_i)](1-v)^{\frac{1}{n-i}}$$

$$\Rightarrow \quad y_{i+1}=F^{-1}\left[1-[1-F(y_i)](1-v)^{\frac{1}{n-i}}\right].$$

وكمثال على ذلك ولتوليد المشاهدات الثلاث الأولى $(k=3)$ لعينة عشوائية حجمها $n=5$ تتبع التوزيع الأسي بدالة كثافة احتمال:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x} & , \quad 0<x, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

ودالة التوزيع:

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-x} & , \quad 0<x, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

وبالاعتماد على الأرقام العشوائية $v_1=0.1514, v_2=0.6697, v_3=0.0527$ نتبع الآتي:

$$\begin{aligned} x &= F^{-1}(w) \\ &= -\ln(1-w). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= F^{-1}\left[1-(1-v_1)^{\frac{1}{n}}\right] \\ &= F^{-1}\left(1-(1-0.1514)^{\frac{1}{5}}\right) \\ &= F^{-1}(0.0323) \\ &= -\ln(1-0.0323) \\ y_1 &= 0.0328, \end{aligned}$$

وهذه هي المشاهدة الأولى ويمكن منها إيجاد المشاهدة الثانية كالتالي:

$$\begin{aligned} y_2 &= F^{-1}\left\{1-\left[1-F(y_1)\right](1-v_2)^{\frac{1}{5-1}}\right\} \\ &= F^{-1}\left\{1-[\exp(-0.0328)](1-0.6697)^{\frac{1}{4}}\right\} \\ &= F^{-1}[1-(0.9677)(0.7581)] \\ &= F^{-1}(0.2664) \\ &= -\ln(1-0.2664) \\ \therefore y_2 &= 0.3098. \end{aligned}$$

ويمكن الحصول على المشاهدة الثالثة كالتالي:

$$\begin{aligned} y_3 &= F^{-1}\left\{1-\left[\exp(-0.3098)\right](1-0.0527)^{\frac{1}{3}}\right\} \\ &= F^{-1}\left[1-(0.7336)(0.9821)\right] \\ &= F^{-1}(0.2795) \\ &= -\ln(1-0.2795) \\ y_3 &= 0.3278. \end{aligned}$$

(١-٤) دالة التوزيع التجميعي للإحصاءات الترتيبية:

لنعتبر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتطابقة ولكل منها دالة التوزيع التجميعي $F(x)$. ولتكن $F_{r:n}(x)$ ، $r=1,2,\cdots,n$ دالة التوزيع التجميعي للإحصاء Y_r وسنحاول إيجاد صيغة للدالة $F_{r:n}(x)$ وذلك بإستخدم أربع طرق مختلفة.

الطريقة الأولى:

سنوجدها مباشرة بالتكامل واستخدام مفكوك ذي الحدين كالتالي:

$$\begin{aligned} F_{r:n}(x) &= \int_{-\infty}^{x} g_r(t)\,dt \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_{-\infty}^{x} f(t)\left[F(t)\right]^{r-1}\left[1-F(t)\right]^{n-r}dt \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_{-\infty}^{x} f(t)\left[F(t)\right]^{r-1}\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}(-1)^j\left[F(t)\right]^j dt \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}(-1)^j\int_{-\infty}^{x} f(t)\left[F(t)\right]^{r+j-1}dt \\ F_{r:n}(x) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}(-1)^j\frac{\left[F(x)\right]^{r+j}}{(r+j)}. \end{aligned}$$

ومنها يمكن إثبات أن:

$$F_{r:n}(-\infty)=0,$$

$$F_{r:n}(\infty)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}(-1)^j\frac{1}{(r+j)}$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j \int_0^1 x^{r+j-1}\, dx$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 x^{r-1} \left[\sum_{j=0}^{n-r} \binom{n-r}{j} (-1)^j x^j \right] dx$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{n-r}\, dx$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} B(r, n-r+1)$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{(r-1)!(n-r)!}{n!} = 1.$$

وكحالة خاصة بوضع $r = n$ فإن:

$$F_{n:n}(x) = \frac{n!}{(n-1)!} \frac{[F(t)]^n}{n} = [F(t)]^n.$$

أو يمكننا إجراء التكامل بصورة أخرى:

$$F_{r:n}(x) = \int_{-\infty}^{x} g_r(t)\, dt$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^{x} f(t) [F(t)]^{r-1} [1-F(t)]^{n-r}\, dt$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^{x} f(t) [1-(1-F(t))]^{r-1} [1-F(t)]^{n-r}\, dt$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^{x} f(t) [1-F(t)]^{n-r} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j [1-F(t)]^j\, dt$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \int_{-\infty}^{x} f(t) [1-F(t)]^{n-r+j}\, dt$$

$$F_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r-1}{j} (-1)^j \left\{ \frac{1-[1-F(x)]^{n-r+j+1}}{n-r+j+1} \right\}.$$

وكحالة خاصة بوضع $r = 1$ في الصيغة السابقة فإن:

$$F_{1:n}(x)=\frac{n!}{(n-1)!}\left\{\frac{1-[1-F(x)]^{n}}{n}\right\}$$
$$=1-[1-F(x)]^{n}.$$

الطريقة الثانية:

يمكننا إيجاد دالة التوزيع التجميعي باستخدام جداول بيتا الناقصة والتي تعرف كما يلي:

$$I_x(\alpha,\beta)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt,$$

بما أن:

$$F_{r:n}(x)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_{-\infty}^{x} f(t)[F(t)]^{r-1}[1-F(t)]^{n-r}\,dt.$$

وبأخذ التعويض:

$$y=F(t)\quad\Rightarrow\quad dy=f(t)dt$$
$$\therefore F_{r:n}(x)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^{F(x)} y^{r-1}(1-y)^{n-r}dy$$
$$=\frac{1}{B(r,n-r+1)}\int_0^{F(x)} y^{r-1}(1-y)^{n-r}dy$$
$$=I_{F(x)}(r,n-r+1).$$

ومن دالة التوزيع يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال بالاشتقاق كالتالي:

$$g_r(x)=\frac{1}{B(r,n-r+1)}\frac{d}{dx}\int_0^{F(x)} y^{r-1}(1-y)^{n-r}dy$$
$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r}f(x)\quad,\quad a<x<b.$$

مثال (١-٤-١):

ليكن $X\sim U(0,1)$ عندها فإن $F_{r:n}(x)$ يمكن إيجادها كما يلي:

$$F_{r:n}(x)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^x t^{r-1}(1-t)^{n-r}dt$$
$$=\frac{1}{B(r,n-r+1)}\int_0^x t^{r-1}(1-t)^{n-r}dt$$

$$= I_x(r, n-r+1),$$

ثم نستخدم جداول بيتا الناقصة لإيجاد قيم $F_{r:n}(x)$.

الطريقة الثالثة:

يمكن إيجاد $F_{r:n}(x)$ باستخدام العلاقة التاليه بين دالة بيتا الناقصة ومجموع ذي الحدين:

$$I_x(r, n-r+1) = \sum_{j=r}^{n} \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j}.$$

وسوف نبرهن العلاقة السابقة كالتالى:

البرهان:

$$I_x(r, n-r+1) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_0^x t^{r-1}(1-t)^{n-r} dt$$

$$= \int_0^x n \binom{n-1}{r-1} t^{r-1}(1-t)^{n-r} dt.$$

سنكامل بالتجزيء $n-r$ من المرات حيث:

$$u = (1-t)^{n-r} \quad , \quad dv = t^{r-1} dt,$$

$$du = -(n-r)(1-t)^{n-r-1} dt \ , \quad v = \frac{1}{r} t^r,$$

$$I_x(r, n-r+1) = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1} x^r (1-x)^{n-r} + \frac{n-r}{r}\int_0^x n \binom{n-1}{r-1} t^r (1-t)^{n-r-1} dt$$

$$= \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + \int_0^x n \binom{n-1}{r} t^r (1-t)^{n-r-1} dt$$

$$= \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + \binom{n}{r+1} x^{r+1} (1-x)^{n-r-1}$$

$$+ \int_0^x n \binom{n-1}{r+1} t^{r+1} (1-t)^{n-r-2} dt$$

$$= \binom{n}{r} x^r (1-x)^{n-r} + \binom{n}{r+1} x^{r+1} (1-x)^{n-r-1} + \cdots$$

$$+ \binom{n}{n-1} x^{n-1} (1-x) + \int_0^x n \binom{n-1}{n-1} t^{n-1} (1-t)^0 dt$$

$$=\binom{n}{r}x^{r}(1-x)^{n-r}+\binom{n}{r+1}x^{r+1}(1-x)^{n-r-1}+\cdots$$

$$+\binom{n}{n-1}x^{n-1}(1-x)+x^{n}$$

$$=\sum_{j=r}^{n}\binom{n}{j}x^{j}(1-x)^{n-j}.$$

ومن العلاقة السابقة فإن:

$$F_{r:n}(x)=I_{F(x)}(r,n-r+1)$$

$$=\sum_{j=r}^{n}\binom{n}{j}[F(x)]^{j}[1-F(x)]^{n-j}.$$

أو يمكن كتابتها على الصورة :

$$F_{r:n}(x)=\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n}{r+j}[F(x)]^{r+j}[1-F(x)]^{n-r-j}.$$

مثال (١-٤-٢):

لتكن $X_1,X_2,\ldots,X_n$ عينة عشوائية من توزيع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=\begin{cases}\nu x^{\nu-1} & , \quad 0<x<1,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

ودالة التوزيع $F(x)=x^{\nu}\ ,\ 0<x<1$ أوجد دالة التوزيع التجميعي للإحصاء Y_r .

الحل :

$$F_{r:n}(x)=\sum_{j=r}^{n}\binom{n}{j}[F(x)]^{j}[1-F(x)]^{n-j}$$

$$=\sum_{j=r}^{n}\binom{n}{j}\left(x^{\nu}\right)^{j}\left(1-x^{\nu}\right)^{n-j}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_{0}^{x^{\nu}}t^{r-1}(1-t)^{n-r}dt.$$

ومنها يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال للاحصاء Y_r كالتالي:

$$\frac{d}{dx}F_{r:n}(x)=g_r(x)$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\nu x^{\nu-1}\left(x^{\nu}\right)^{r-1}\left(1-x^{\nu}\right)^{n-r}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\nu x^{r\nu-1}\left(1-x^{\nu}\right)^{n-r} \quad , \quad 0<x<1.$$

وبشكل عام إذا كانت لدينا $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع متصل فإنه يمكن اشتقاق $F_{r:n}(x)$ للحصول على $g_r(x)$ كما يلي:

$$g_r(x)=\frac{d}{dx}F_{r:n}(x)$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{\sum_{j=r}^{n}\binom{n}{j}[F(x)]^{j}[1-F(x)]^{n-j}\right\}$$

$$=n f(x)[F(x)]^{n-1}+\sum_{j=r}^{n-1}\binom{n}{j}j[F(x)]^{j-1}[1-F(x)]^{n-j}f(x)$$

$$-\sum_{j=r}^{n-1}\binom{n}{j}(n-j)[F(x)]^{j}[1-F(x)]^{n-j-1}f(x).$$

وحيث إن:

$$\binom{n}{j}j=\frac{n!}{(j-1)!(n-j)!},$$

$$\binom{n}{j}(n-j)=\frac{n!}{(j)!(n-j-1)!}.$$

لاحظ إن حدود المجاميع ستتلاشى مع بعض ما عدا عند $j=r$ في المجموع الأول وعند $j=n-1$ في المجموع الثاني وعلى ذلك:

$$g_r(x)=n f(x)[F(x)]^{n-1}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r}f(x)$$

$$-\frac{n!}{(n-1)!(0)!}[F(x)]^{n-1}f(x)$$

$$=n f(x)[F(x)]^{n-1}+\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r}f(x)$$

$$-n f(x)[F(x)]^{n-1}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r}f(x).$$

الطريقة الرابعة:

$$F_{r:n}(x)=P(Y_r\le x)$$

$$=\sum_{j=r}^{n}\binom{n}{j}[F(x)]^{j}[1-F(x)]^{n-j}$$

البرهان:

ليكن x ثابت، نُعرف:

$$Z_i = 0 \quad , \quad \text{if } X_i > x$$
$$= 1 \quad , \quad \text{if } X_i \le x.$$

عندها فإن عدد المتغيرات التي تحقق الشرط إن $X_i \le x$ هو $W = \sum_{i=1}^{n} Z_i$، حيث W متغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين بالمعالم $n, F(x)$ والآن:

$$F_{r:n}(x) = P(Y_r \le x)$$
$$= P(\sum_{i=1}^{n} Z_i \ge r)$$
$$= P(W \ge r)$$
$$= \sum_{j=r}^{n} \binom{n}{j} [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j}.$$

استندنا في البرهان السابق على المساواة بين الحادثتين $Y_r \le x$ و $\sum_{i=1}^{n} Z_i \ge r$، لأنه عندما يكون الإحصاء الترتيبي ذو الرتبة r أقل من أو يساوي x فإنه من المؤكد أن عدد X_i أقل من أو يساوي x أكبر من أو يساوي r أي أن $\sum_{i=1}^{n} Z_i \ge r$. ويلاحظ إنه في البرهان لم نشترط أن يكون التوزيع متصلاً لذا فالصيغة تصلح للمتقطع أيضاً.

وكحالة خاصة عندما $r = n$ فإن:

$$F_{n:n}(x) = \sum_{j=n}^{n} \binom{n}{j} [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j}$$
$$= \binom{n}{n} [F(x)]^n [1 - F(x)]^{n-n}$$
$$= [F(x)]^n.$$

وعندما $r = 1$ فإن:

$$F_{1:n}(x) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} [F(x)]^j [1 - F(x)]^{n-j}$$
$$= 1 - \binom{n}{0} [F(x)]^0 [1 - F(x)]^{n-0}$$
$$= 1 - [1 - F(x)]^n.$$

مثال (١-٤-٣):

لتكن $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_5$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية من الحجم $n = 5$ مسحوبة من توزيع له دالة كثافة احتمال :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

احسب $P(Y_4 < \frac{1}{2})$.

الحل:

$$P(X < \tfrac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x\,dx = \frac{1}{4},$$

$$P(Y_4 < \tfrac{1}{2}) = \sum_{j=4}^{5} \binom{5}{j} \left[F(\tfrac{1}{2})\right]^j \left[1 - F(\tfrac{1}{2})\right]^{5-j}$$

$$= \binom{5}{4} \left[\frac{1}{4}\right]^4 \left[\frac{3}{4}\right] + \binom{5}{5} \left[\frac{1}{4}\right]^5 \left[\frac{3}{4}\right]^0$$

$$= \frac{16}{45} = 0.0156.$$

مثال (١-٤-٤):

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة وتتبع التوزيع الهندسي بدالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = (1-p)^{x-1} p \quad , \quad x = 1, 2, 3, \cdots$$

ودالة التوزيع التجميعي:

$$F(x) = \sum_{w=1}^{x} (1-p)^{w-1} p$$

$$= p \sum_{w=0}^{x-1} (1-p)^w.$$

باستخدام مجموع المتسلسلة الهندسية $\sum_{i=0}^{k} a^i = \frac{1 - a^{k+1}}{1 - a}$ فإن:

$$F(x) = p\,\frac{1 - (1-p)^x}{1 - (1-p)}$$

$$= 1 - (1-p)^x.$$

وهذا عندما x عدد صحيح موجب وحيث إن $F(x)$ ثابتة بين الأعداد الصحيحة الموجبة فإن

$$F(x) = 1-(1-p)^{[x]} \quad , \quad x \geq 1$$
$$= 0 \quad , \quad x < 1,$$

حيث $[x]$ هو أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x ومنه يمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعي للإحصاء Y_r كالتالي:

$$F_{r:n}(x) = \sum_{j=r}^{n} \binom{n}{j} [F(x)]^j [1-F(x)]^{n-j}$$
$$= \sum_{j=r}^{n} \binom{n}{j} \left[1-(1-p)^{[x]}\right]^j \left[(1-p)^{[x]}\right]^{n-j}.$$

وكحالة خاصة عندما $r = 1$ فإن:

$$F_{1:n}(x) = 1-\binom{n}{0} \left[1-(1-p)^{[x]}\right]^0 \left[(1-p)^{[x]}\right]^{n-0}$$
$$= 1-(1-p)^{n[x]}.$$

مثال (١-٤-٥):

لتكن $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_7$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية من الحجم $n = 7$ مسحوبة من توزيع له دالة كثافة احتمال:

$$f(x) = \begin{cases} 3(1-x)^2 & , \quad 0 < x < 1, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

احسب $P(Y_4 < 1-\sqrt[3]{.6})$.

الحل:

$$P(X < 1-\sqrt[3]{.6}) = \int_0^{1-\sqrt[3]{.6}} 3(1-x)^2 dx$$
$$= -(1-x)^3 \Big|_0^{1-\sqrt[3]{.6}} = .4.$$
$$P(Y_4 < 1-\sqrt[3]{.6}) = \sum_{j=4}^{7} \binom{7}{j} (.4)^j (.6)^{7-j}.$$
$$= 1.000 - 0.7102 = 0.2898.$$

حيث تم حسابها من جدول توزيع ذات الحدين في ملحق (١)

في المثال السابق كان من السهل إيجاد النتيجة من الجداول والسؤال الآن إذا كان حجم العينة كبير جداً كيف يمكننا حساب الاحتمال؟ بالطبع بما إن الاحتمال يتبع ذات الحدين فيمكننا تقريبه إلى التوزيع الطبيعي بشرط أن تكون n كبيرة والمثال التالي يوضح الفكرة.

مثال (١-٤-٦):

لتكن $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_{100}$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية من الحجم $n = 100$ مسحوبة من توزيع له الوسيط $m = 68.1$ (أي أن $P(X < 68.1) = \frac{1}{2}$) ما هو احتمال إن الإحصاء الترتيبي من الرتبة 55 (Y_{55}) أقل من أو يساوي 68.1.

الحل:

$$P(Y_{55} < 68.1) = \sum_{j=55}^{100} \binom{100}{j} (.5)^j (.5)^{100-j}$$
$$= 1 - \sum_{j=0}^{54} \binom{100}{j} (.5)^j (.5)^{100-j}$$
$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{54.5-50}{5}\right)$$
$$= 1 - \Phi(0.9) = 0.1841.$$

حيث $\Phi(.)$ داله التوزيع التجميعي لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي وقد تم حساب $\Phi(.9)$ من جداول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق(2) حيث:

$$\Phi(.9) = 0.5 + 0.3159 = 0.8159.$$

(١-٥) المئينات للإحصاءات الترتيبية:

(١-٥-١) التقدير للمئين من الرتبه 100p:

المئين من الرتبه $100p$ لدالة كثافة احتمال $f(x)$ لمتغير عشوائي X هو رقم حقيقى يقسم المساحة تحت دالة كثافة الاحتمال الى جزئين معلومتين القيمة . فقط المساحة علي يسار الرقم الحقيقى تعرف وذلك لان المساحه تحت المنحنى تساوى الواحد الصحيح. ليكن المئين من الرتبه $100p$ يرمز له بالرمز x_p لكل $0 \le p \le 1$. بدلالة دالة التوزيع التجميعى فإن x_p يعرف على أنه اى رقم حقيقى نحصل عليه بحل المعادلة التالية:

$$F(x_p) = p.$$

سوف نفترض هنا أن الحل الوحيد لـ x_p، حيث $0 \le p \le 1$ ، نحصل عليه فى حالة إذا كانت الدالة F تتزايد بإضطراد. على سبيل المثال $x_{0.5}$ هو الوسيط للتوزيع ، ويستخدم كمقياس النزعه المركزية.

لتقدير المئين من الرتبه $100p$ نحتاج الى النظرية التالية:

نظرية (١-٥-١):(نظرية التحويل التكاملي)

ليكن X متغير عشوائي له دالة التوزيع التجميعي $F(x)$. إذا كانت F متصلة فإن المتغير العشوائي $Y=F(X)$ له توزيع منتظم قياسي على الفترة $(0,1)$.

البرهان :

لاحظ إن الدالة $F(x)$ للتوزيع المتصل تكون متزايدة دائماً وبالتالي فإنها أحادية ولها دالة عكسية ولتكن $F^{-1}(x)$، ولنعتبر التحويلة $Y=F(X)$ عندها فإن:

$$\begin{aligned}
P(Y\le y) &= P\left[F(X)\le y\right] \\
&= P\left[X\le F^{-1}(y)\right] \\
&= F\left[F^{-1}(y)\right] \\
&= y \quad , \quad 0\le y\le 1.
\end{aligned}$$

إذاً Y يتبع التوزيع المنتظم في الفترة $(0,1)$.

إذا ما كان لدينا عينة عشوائية $X_1,X_2,\ldots,X_n$ مسحوبة من توزيع له دالة التوزيع $F(x)$ متصلة، حينها (وبالاعتماد على النظرية السابقة) فإن $F(X_1),F(X_2),\ldots,F(X_n)$ عينة عشوائية من توزيع منتظم على الفترة $(0,1)$. وبنفس الطريقة إذا كانت $Y_1<Y_2<\ldots<Y_n$ الإحصاءات الترتيبية للعينة فإن $F(Y_1)<F(Y_2)<\ldots<F(Y_n)$ لأن الدالة F دالة تزايدية باستمرار ولا يوجد احتمال تساوي أي قيمتين منها وبالتالي يمكن اعتبارها الإحصاءات الترتيبية للعينة $F(X_1),F(X_2),\ldots,F(X_n)$ أي أن المتغيرات:

$$U_1=F(Y_1)<U_2=F(Y_2)<\ldots<U_n=F(Y_n).$$

يمكن اعتبارها إحصاءات ترتيبية لعينة عشوائية تتبع التوزيع المنتظم بدالة كثافة احتمال:

$$g(u)=\begin{cases}1 & , \quad 0<u<1, \\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

ودالة توزيع:

$$G(u)=\begin{cases}0 & , \quad u<0, \\ u & , \quad 0<u<1, \\ 1 & , \quad u\ge 1.\end{cases}$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء U_r هي:

$$g_r(u)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}u^{r-1}(1-u)^{n-r} \quad , \quad 0<u<1.$$

أي أنه يتبع توزيع بيتا بمعالم $\alpha = r$, $\beta = n - r + 1$، ويمكن إيجاد القيمة المتوقعة للمتغير U_r كالتالي:

$$E(U_r) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^1 u^r(1-u)^{n-r}du$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}B(r+1, n-r+1)$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\,\frac{r!(n-r)!}{(n+1)!}$$

$$\therefore E(U_r) \quad = \frac{r}{n+1}.$$

ويمكن تفسير $U_r = F(Y_r)$ على إنها المساحة المحصورة تحت المنحنى $f(x)$ وفوق المحـــور X على يسار مسافة Y_r، ويمكن اعتبارها مساحة عشوائية وتوقعها هو:

$$E(U_r) = \frac{r}{n+1}.$$

أما المساحة المحصورة بين إحصاءين متتاليين Y_{r-1}, Y_r فهي $F(Y_r) - F(Y_{r-1})$ وهـــي أيـــضاً مساحة عشوائية والقيمة المتوقعة لها هي:

$$E[F(Y_1) - 0] = E(U_1 - 0) = E(U_1) = \frac{1}{n+1},$$

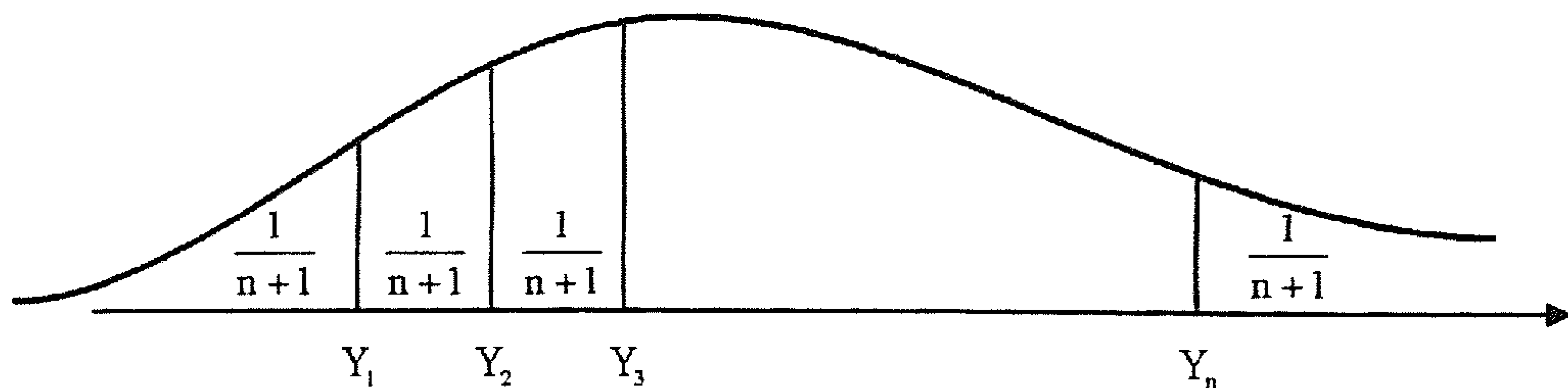
$$E[F(Y_r) - F(Y_{r-1})] = E(U_r - U_{r-1}) = E(U_r) - E(U_{r-1})$$

$$= \frac{r}{n+1} - \frac{r-1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} \quad , \quad r = 2, 3, \cdots, n,$$

$$E[1 - F(Y_n)] = E(1 - U_n) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

إذاً يمكن القول إن الإحصاءات الترتيبية $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ تقسم المساحة تحت المنحنى $f(x)$ وفوق المحور X (كما في الشكل التالي) إلى $n+1$ من المساحات وفي المتوسط فإن كـــل مـــساحة تساوي $\frac{1}{n+1}$.



وقد علمنا في ما سبق إن المساحة على يسار المئين ذو الرتبة 100p هي p . لذا يمكن اقتراح Y_r كتقدير للمئين x_p حيث:

$$p = \frac{r}{n+1}.$$

أي أن $r = (n+1)p$ ولكن في أغلب الأحيان لا يكون r المعطاة بالعلاقة السابقة عدد صحيح لذلك نستعمل المعدل المرجح للترتيبتان Y_r, Y_{r+1} وهو:

$$x_p = Y_r + p(Y_{r+1} - Y_r),$$

حيث r هو أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي $(n+1)p$ وبشكل خاص الوسيط حيث $p = \frac{1}{2}$ هو:

$$\nu = \begin{cases} Y_{\frac{n+1}{2}} & \text{where n is odd ,} \\ \dfrac{Y_{\frac{n}{2}} + Y_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{where n is even.} \end{cases}$$

مثال (١-٥-١):

ليكن X يساوي وزن الصابون في قنينة "1000 غرام". سحبت عينة عشوائية من $n = 12$ أنتجت الأوزان التالية التي رتبت كالتالي:

1013 , 1019 , 1021 , 1024 , 1026 , 1028 ,
1033 , 1035 , 1039 , 1040 , 1043 , 1047

حيث $n = 12$ عدد زوجي ، وسيط العيّنة هو:

$$\tilde{m} = \frac{y_6 + y_7}{2} = \frac{1028 + 1033}{2} = 1030.5.$$

أما موقع المئين ذو الرتبة 25 (أو الربيع الأول) فهو:

$$(n+1)p = (12+1)(.25) = 3.25 \quad , \quad r = 3.$$

وعلى ذلك الربيع الأول، باستعمال المعدل المرجح هو:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= y_3 + .25(y_4 - y_3) \\ &= .75y_3 + .25y_4 \\ &= (.75)(1021) + (.25)(1024) = 1021.75. \end{aligned}$$

بنفس الطريقة يمكن إيجاد المئين ذو الرتبة 75 بإتباع الخطوات التالية:

$$(n+1)p = (13)(.75) = 9.75 \quad , \quad r = 9,$$
$$\tilde{q}_3 = y_9 + (.75)(y_{10} - y_9)$$
$$= .25\, y_9 + .75 y_{10}$$
$$= (.25)(1039) + (.75)(1040) = 1039.75.$$

بفرض أننا نرغب فى إيجاد فترة ثقة للمعلمة x_p لبعض القيم من p . لتقدير مئين العينة من الرتبه p نستخدم احصائيين ترتيبين من عينه عشوائيه مختاره من المجتمع $F(x)$ وذلك للحصول على الحد الادنى والحد الاعلى لفترة ثقة للمئين من الرتبه p. أى أننا نريد اختيار رقمين r,s حيث $r < s$ بحيث أن :

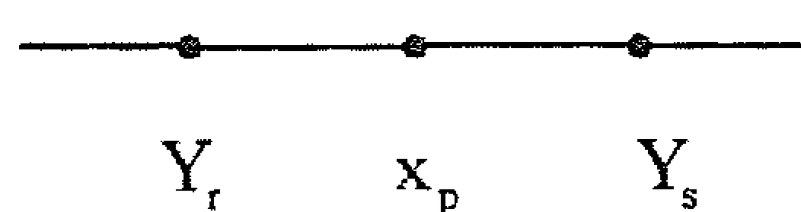
$$P(Y_r < x_p < Y_s) = 1 - \alpha$$

وذلك لبعض القيم المختارة من α حيث $0 \le p \le 1$.

الآن الحادثة $Y_r < x_p$ تحدث إذا فقط إما.

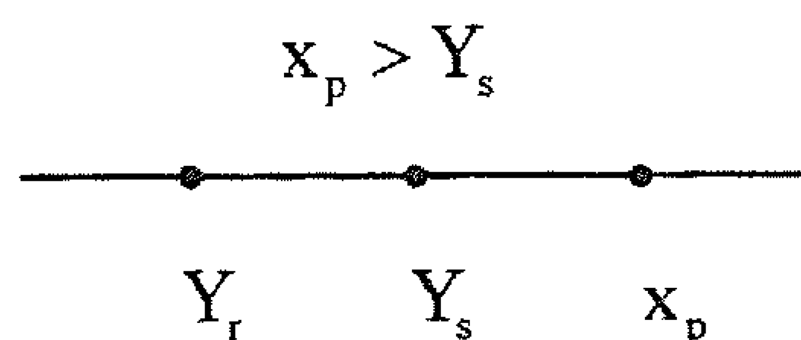
$$Y_r < x_p < Y_s$$

أي:



أو:

$$x_p > Y_s$$



والحادثتين متنافيتين .

وعلي ذلك لكل $r < s$ فإن:

$$P(Y_r < x_p) = P(Y_r < x_p < Y_s) + P(x_p > Y_s)$$

والتى تكافئ العلاقة التالية:

$$P(Y_r < x_p < Y_s) = P(Y_r < x_p) - P(Y_s < x_p).$$

وبما أن F دالة متزايدة بإضطرار فإن :

$$Y_r < x_p$$
$$\Leftrightarrow F(Y_r) < F(x_p).$$

ولكن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي $F(Y_r)$ تعتبر داله كثافة الاحتمال للاحصاء التـــرتيبي من توزيع منتظم فى الفترة $(0 , 1)$ كما علمنا من نظرية التحويل التكاملى ، واكثر من ذلك فـــإن $F(x_p) = p$ وذلك من تعريف x_p . وعلى ذلك لاي احصاء ترتيبي من الرتبه r (Y_r) مـــن أى توزيع متصل بمئين x_p نحصل على:

$$P(Y_r < x_p) = P[F(Y_r) < p]$$

$$= \int_0^p \frac{n!}{(r-1)!\,(n-r)!} u^{r-1}(1-u)^{n-r} du$$

$$= \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i},$$

$$P(Y_r < x_p < Y_s)$$

$$= \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} - \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} p^i q^n$$

$$= \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = 1-\alpha.$$

أي أننا نبحث عن عددين r , s $r < s$ بحيث تتحقق العلاقة السابقة.

فمثلا عندما $n = 6$, $p = .25$ فإن :

$$P(Y_1 < x_p < Y_4) = \sum_{i=1}^{3} \binom{6}{i} \left(\frac{1}{4}\right)^i \left(\frac{3}{4}\right)^{6-i} \approx .78,$$

يمكن بسهولة تكوين فترة ثقة للوسيط $x_{0.5}$ بإستخدام توزيع ثنائي الحـــدين. فـــإذا كانـــت $X_1, X_2, \dots , X_n$ عينة عشوائية من أى مجتمع وسيطه $x_{0.5}$ وكانت $Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n$ هـــى الاحصاءات الترتيبية و $p = \frac{1}{2}$ لهذه العينة. فإننا نبحـــث عـــن عـــددين s , r , $r < s$ بحيـــث $P(Y_r < x_{0.5} < Y_s) = 1-\alpha$.

وبذلك تكون Y_s, Y_r هى فترة الثقة و $(1-\alpha)$ هى درجة الثقة ، ويمكـــن الحـــصول عليها كالتالى:

$$P(Y_r < x_{0.5} < Y_s) = \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+n-i}$$

$$= \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} \frac{1}{2}^n = 1-\alpha.$$

وهذه المعادلة تعطينا فترة ثقة للوسيط $x_{0.5}$ حيث $p = .5$.

مثال (١-٥-٢):

بفرض أن $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_5$ تمثل الاحصاءات الترتيبية من عينه عشوائية من الحجم $n = 5$ وإذا كانت :

$$P(Y_1 < x_{0.5} < Y_5) = \sum_{i=1}^{4} \binom{5}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{s-i}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 15/16.$$

أى أن احتمال ان الفترة العشوائية (Y_1, Y_5) تحتوى على الوسيط $x_{0.5}$ هو $15/16 \approx 0.94$. وعلى ذلك بفرض أننا سحبنا عينه وكانت المشاهدات المرتبه هى $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_5$ فإن (Y_1, Y_5) هى 94% فترة ثقة للوسيط $x_{0.5}$.

وحيث اننا غالبا نستخدم فترات ثقة مركزية فإننا عادة نختار $s = n - r + 1$. وهذا يعنى أننا نأخذ القراءات ذات الرتبة r فى القيمة من أعلى ومن اسفل وبذلك تكون قد برهنا النظرية الآتية:

نظرية (١-٥-٢):

إذا كانت $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ عينه مرتبة حجمها n من مجتمع $f(x)$ فإن احتمال أن تشتمل الفترة العشوائية $P(Y_r < x_{0.5} < Y_{n-r+1})$ على الوسيط هو $\sum_{i=r}^{n-r} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبالتالى فإذا كنا نرغب فى فترة بمعامل قدره $(1-\alpha)$ فإننا نختار الرقم r الذى يجعل :

$$\sum_{i=r}^{n-r} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 1-\alpha.$$

مثال (١-٥-٣):

إذا كان لدينا عينه عشوائية من $n = 9$ وكانت المشاهدات هي:

32.5 , 27.6 , 29.3 , 30.1 , 15.5 , 21.7 , 22.8 , 21.2 , 19.0

وعلى ذلك المشاهدات المرتبه سوف تكون:

$$15.5 < 19.0 < 21.2 < 22.8 < 27.6 < 29.3 < 30.1 < 32.5$$

قبل سحب العينه فإننا نعلم أن :

$$P(Y_2 < x_{.5} < Y_8)$$
$$= \sum_{i=2}^{7} \binom{9}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{9-i}$$
$$= 0.9805 - 0.0195 = 0.9610.$$

وذلك من جدول ذى الحدين فى ملحق (١) وعلى ذلك فتره الثقه $(y_2 = 19 \ , \ y_8 = 30.1)$ للوسيط $x_{.5}$ لها 96% معامل ثقه.

مثال (١-٥-٤):

أوجد فترة ثقة للوسيط $x_{0.5}$ إذا علم أن $n = 10$, $(1-\alpha) = .95$.

الحل:

$$P(Y_r < x_{0.5} < Y_{n-r+1})$$
$$= 1\text{-}\alpha = .95$$
$$= \sum_{i=r}^{10-r} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = .95$$

والآن نختار r المناسبة فنجد أن:

(i) $P(Y_5 < x_{0.5} < Y_6) = \sum_{i=r}^{10-5} \binom{10}{i} \frac{1}{1024} = .25 < .95.$

(ii) $P(Y_3 < x_{0.5} < Y_8) =$

$$= \sum_{i=3}^{7} \binom{10}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \sum_{i=3}^{7} \binom{10}{i} \frac{1}{1024}$$
$$= .89 < .95$$

(iii) $P(Y_2 < x_{0.5} < Y_9) = \sum_{i=2}^{8} \binom{10}{i} \frac{1}{1024}$

$$= .98 > 0.95.$$

وبالتالى فإن $(Y_2\ ,\ Y_1)$ تكون 98% فترة ثقة لوسيط المجتمع $X_{0.5}$.

عندما تكون n كبيرة $(n > 20)$ فإنه يمكن استخدام التوزيع الطبيعى كتقريب لتوزيع ثنائي الحدين فى هذه الحالة نعلم أن i تتبع التوزيع الطبيعى الذى وسطه الحسابى $\frac{n}{2}$ لأن

$$E(i) = np = n.\frac{1}{2} = \frac{n}{2} \quad \text{وتباينه} \quad np(1-p) = n\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{n}{4}$$

لتوضيح كيف أن هذا التقريب جيد سوف نحسب الاحتمال المقابل الى $n = 16$ من جدول التوزيع الطبيعى القياسي فى ملحق (٢) وايضا نحسب الاحتمال بإستخدام جدول توزيع ذى الحدين فى ملحق (١) نجد أنهما متساويين كمايلى:

$$\begin{aligned}1-\alpha &= P(Y_5 < x_{.5} < Y_{12}) = \sum_{i=5}^{11} \binom{16}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)^{16-i}\\ &= P(W=5\ ,6\ ,\ldots,\ 11)\\ &= 0.9616 - 0.0384 = 0.9232.\end{aligned}$$

حيث W يتبع توزيع ذى الحدين بمعالم $n = 16$, $p = \frac{1}{2}$. باستخدام التقريب الطبيعى فإننا نحصل على:

$$\begin{aligned}1-\alpha &= P(4.5 < W < 11.5)\\ &= P\left(\frac{4.5-8}{2} < \frac{W-8}{2} < \frac{11.5-8}{2}\right)\\ &, \mu = n\,p = 16\left(\frac{1}{2}\right) = 8\cdot\end{aligned}$$

حيث:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{16\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = 2,$$

المتغير القياسي $Z = \frac{W-8}{2}$ تقريبا يتبع التوزيع الطبيعى القياسي. وعلى ذلك:

$$\begin{aligned}1-\alpha &\approx \Phi\left(\frac{3.5}{2}\right) \sim \Phi\left(\frac{-3.5}{2}\right)\\ &= 0.9198.\end{aligned}$$

يلاحظ أن النتيجه هنا قريبه من الاحتمال بالضبط (0.9232) .

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد فترة ثقة لاي مئين من الرتبه 100p ، كما يتضح من المثال التالى .

مثال (١-٥-٥):

بفرض أن عينه عشوائيه من الحجم $n = 27$ وكانت قراءها كالتالي:

61	80	92	105	129	164
69	83	93	113	141	191
71	84	96	121	143	217
74	86	100	122	156	276
79	87	104			

وبفرض اننا نرغب فى ايجاد تقدير لمئين ذو الرتبه $100(.25)$ (ليكن $x_{.25}$) للمجتمع . بمـا أن $(n+1)p = 28\left(\frac{1}{4}\right) = 7$ فإن الاحصاء الترتيبى من الرتبه 7 والمـسمى $y_7 = 83$ سـوف يكون تقدير بنقطه للمئين من الرتبه $100(.25)$ كما ذكرنا فى الباب الاول . لايجاد فتره ثقـه لـ $x_{.25}$ نتبع الآتي :

$$1-\alpha = P(Y_4 < x_{.25} < Y_{10})$$
$$= \sum_{i=4}^{9} \binom{27}{i} (.25)^i (.75)^{27-i}$$
$$= P(3.5 < W < 9.5)$$

حيث W يتبع توزيع ذى الحدين بمتوسط $27/4 = 6.75$ وتباين $81/16$ وعلي ذلك:

$$1-\alpha = \Phi\left(\frac{9.5-6.75}{9/4}\right) - \Phi\left(\frac{3.5-6.75}{9/4}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{11}{9}\right) - \Phi\left(\frac{-13}{9}\right)$$
$$= 0.8149.$$

وذلك من جدول التوزيع الطبيعى القياسي فى ملحق (٢).

وعلي ذلك $(y_4 = 74 \; , \; y_{10} = 97)$ يمكت استخدامها فى الحصول على 81.49% فتره ثقه لـ $x_{.25}$. يمكن استخدام $y_5 = 71$, $y_{11} = 92$ والتى تؤدى الى الحصول على معامل ثقـه مختلفة.

(١-٥-٢) المئينات لبعض التوزيعات:

قبل تقديم المئينات لبعض التوزيعات الاحتمالية تحتاج الى النظريات التالية:

نظرية (١-٥-٣):

$$I_x(p,q)=1-I_{1-x}(q,p).$$

البرهان:

$$I_x(p,q)=\frac{1}{B(p,q)}\int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt.$$

وبالتعويض التالي:

$$w=1-t \quad \Rightarrow \quad t=1-w \quad , \quad dt=-dw.$$

فإن:

$$\begin{aligned} I_x(p,q)&=\frac{1}{B(p,q)}\int_{1-x}^{1}(1-w)^{p-1}w^{q-1}dw \\ &=1-\frac{1}{B(p,q)}\int_0^{1-x}(1-w)^{p-1}w^{q-1}dw \\ &=1-\frac{1}{B(q,p)}\int_0^{1-x}w^{q-1}(1-w)^{p-1}dw \\ &=1-I_{1-x}(q,p). \end{aligned}$$

ولإيجاد المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء الترتيبي Y_r نستخدم المعادلة:

$$F_{r:n}(x_p)=I_{F(x_p)}(r,n-r+1)=p.$$

وكحالة خاصة عندما $r=1$ فإن المئين ذو الرتبة $100p$ يعطى من الصيغة التالية:

$$F_{1:n}(x_p)=1-\left[1-F(x_p)\right]^n=p.$$

$$\Rightarrow \quad \left[1-F(x_p)\right]^n=1-p$$

$$\Rightarrow \quad 1-F(x_p)=(1-p)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad F(x_p)=1-(1-p)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad x_p=F^{-1}\left[1-(1-p)^{\frac{1}{n}}\right].$$

وفي الحالة الخاصة عندما $r=n$ فإن دالة التوزيع التجميعي تعطى من الصيغة التالية:

$$F_{n:n}(x_p)=\left[F(x_p)\right]^n=p.$$

$$\Rightarrow \quad x_p=F^{-1}\left(p^{\frac{1}{n}}\right).$$

نظرية (١-٥-٤):

إذا كان التوزيع متماثل حول الصفر [$f(x)$ متماثل حول الصفر] فإن المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء Y_r هو نفسه المئين ذو الرتبة $100(1-p)$ للإحصاء Y_{n-r+1} ولكن بإشارة سالبة والعكس صحيح.

البرهان:

بوضع $p=1-\gamma$, $-y=x$ في المعادلة التالية:

$$I_{F(x)}(r,n-r+1)=p$$

$$\therefore I_{F(-y)}(r,n-r+1)=1-\gamma.$$

وحيث أن التوزيع متماثل حول الصفر فإن $F(-y)=1-F(y)$ وتصبح العلاقة:

$$I_{1-F(y)}(r,n-r+1)=1-\gamma.$$

وباستخدام العلاقة $I_x(p,q)=1-I_{1-x}(q,p)$ نحصل على:

$$1-I_{F(y)}(n-r+1,r)=1-\gamma.$$

$$\therefore \quad I_{F(y)}(n-r+1,r)=\gamma$$

$$\therefore \quad I_{F(-x)}(n-r+1,r)=1-p.$$

أي أن $-x$ هو المئين ذو الرتبة $100(1-p)$ للإحصاء Y_{n-r+1} .

نتيجة (١-٥-١):

إذا كان التوزيع متماثل حول الصفر فإن:

$$F_{r:n}(x)+F_{n-r+1:n}(-x)=1.$$

البرهان:

من الخاصية السابقة نستنتج إن :

$$F_{r:n}(x)=I_{F(x)}(r,n-r+1)=p,$$

$$\begin{aligned}F_{n-r+1:n}(-x)&=I_{F(-x)}(n-r+1,r)\\&=I_{1-F(x)}(n-r+1,r)\\&=1-I_{F(x)}(r,n-r+1)\\&=1-p.\end{aligned}$$

$$\therefore F_{r:n}(x)+F_{n-r+1:n}(-x)=1.$$

وباشتقاق العلاقة السابقة نحصل على:

$$g_r(x) - g_{n-r+1}(-x) = 0$$
$$\Rightarrow \quad g_r(x) = g_{n-r+1}(-x).$$

كما يمكن برهان هذه العلاقة بأسلوب أخر حيث:

$$g_{n-r+1}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(x)[F(x)]^{n-r}[1-F(x)]^{r-1}$$

وبوضع $-x$ بدلاً من x نحصل على:

$$g_{n-r+1}(-x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(-x)[F(-x)]^{n-r}[1-F(-x)]^{r-1}$$
$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} f(x)[1-F(x)]^{n-r}[F(x)]^{r-1}$$
$$= g_r(x).$$

(أ) **التوزيع الطبيعى القياسي:**

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي قياسي $N(0,1)$ له دالة كثافة الاحتمال:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad , \quad -\infty < x < \infty.$$

ودالة التوزيع:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

أوجد المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء Y_r.

الحل :

$$g_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \phi(x)[\Phi(x)]^{r-1}[1-\Phi(x)]^{n-r},$$

$$F_{r:n}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^{x} \phi(t)[\Phi(t)]^{r-1}[1-\Phi(t)]^{n-r} dt$$
$$= I_{\Phi(x)}(r, n-r+1).$$

وفي الحالة الخاصة عندما $r = 1$ فإن:

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - \Phi(t)]^n$$

ولإيجاد المئين من الرتبة $100p$ للإحصاء Y_1 نضع:

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - \Phi(x)]^n = p.$$
$$\Rightarrow \quad [1 - \Phi(x)]^n = 1 - p$$

$$\Rightarrow \quad 1-\Phi(x)=(1-p)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(x)=1-(1-p)^{\frac{1}{n}}.$$

وبالتالي فيمكن الحصول على x من جداول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٢) أما المئين ذو الرتبة $100p$ للمتغير Y_n فيعطى بحل المعادلة التالية:

$$F_{n:n}(x)=[\Phi(x)]^n=p.$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(x)=p^{\frac{1}{n}}.$$

وهذا أيضاً يعطى من جداول التوزيع الطبيعي القياسي في ملحق (٢) . ويمكن أيضاً إيجاد المنوال للاحصاء Y_r باشتقاق $g_r(x)$ ومساواتها بالصفر كالتالي:

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\frac{d}{d\tilde{x}}\left\{\phi(\tilde{x})[\Phi(\tilde{x})]^{r-1}[1-\Phi(\tilde{x})]^{n-r}\right\}=0$$

$$\begin{aligned}
&\phi'(\tilde{x})[\Phi(\tilde{x})]^{r-1}[1-\Phi(\tilde{x})]^{n-r}\\
&+(r-1)\phi^2(\tilde{x})[\Phi(\tilde{x})]^{r-2}[1-\Phi(\tilde{x})]^{n-r}\\
&-(n-r)\phi^2(\tilde{x})[\Phi(\tilde{x})]^{r-1}[1-\Phi(\tilde{x})]^{n-r-1}=0
\end{aligned}$$

وبالقسمة على $[\Phi(\tilde{x})]^{r-2}[1-\Phi(\tilde{x})]^{n-r-1}$ تصبح المعادلة :

$$\begin{aligned}
\phi'(\tilde{x})[\Phi(\tilde{x})][1-\Phi(\tilde{x})]+(r-1)\phi^2(\tilde{x})[1-\Phi(\tilde{x})]&\\
-(n-r)\phi^2(\tilde{x})[\Phi(\tilde{x})]&=0
\end{aligned}$$

وحيث إن $\phi'(\tilde{x})=-\tilde{x}\,\phi(\tilde{x})$ تصبح المعادلة:

$$\tilde{x}[\Phi(\tilde{x})][1-\Phi(\tilde{x})]=(r-1)\phi(\tilde{x})[1-\Phi(\tilde{x})]-(n-r)\phi(\tilde{x})[\Phi(\tilde{x})].$$

وبحل المعادلة السابقة نحصل على المنوال. ونجد إن العلاقة السابقة لا تتغير إذا وضعنا $-\tilde{x}$ بدلاً من $\tilde{x}$ و $n-r+1$ بدلاً من r أي أن منوال الإحصاء Y_r يساوي منوال الإحصاء Y_{n-r+1} ولكن بإشارة سالبة. وكحالة خاصة عندما $r=n$ فإن المعادلة تصبح:

$$\tilde{x}[\Phi(\tilde{x})]=(n-1)\phi(\tilde{x}).$$

(ب) **التوزيع اللوجستي:**

ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع اللوجستي وله دالة التوزيع التجميعي:

$$F(x)=\frac{1}{(1+e^{-gx})}\quad,\quad -\infty<x<\infty,$$

ودالة كثافة احتمال:

$$f(x)=\frac{g e^{-gx}}{(1+e^{-gx})^2} \quad , \quad -\infty<x<\infty,$$

وهو توزيع متماثل حول الصفر. ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء Y_r من عينة عشوائية حجمها n هي:

$$g_r(x)=\frac{1}{B(r,n-r+1)}\frac{g e^{-gx}}{(1+e^{-gx})^2}\left[\frac{1}{(1+e^{-gx})}\right]^{r-1}\left[1-\frac{1}{(1+e^{-gx})}\right]^{n-r}$$

$$=\frac{1}{B(r,n-r+1)}\frac{g e^{-gx(n-r+1)}}{(1+e^{-gx})^{n+1}} \quad , \quad -\infty<x<\infty.$$

بينما دالة التوزيع التجميعي تعطى من دالة بيتا الناقصة:

$$F_{r:n}(x)=I_{\frac{1}{(1+e^{-gx})}}(r,n-r+1).$$

حيث:

$$F_{r:n}(x)=\frac{1}{B(r,n-r+1)}\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}(-1)^j\frac{1}{(j+r)(1+e^{-gx})^{j+r}}$$

أو بطريقة أخرى كالتالي:

$$F_{r:n}(x)=\frac{1}{B(r,n-r+1)}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}(-1)^j\frac{1}{n-r+j+1}\left[1-\left(\frac{e^{-gx}}{1+e^{-gx}}\right)^{n-r+j+1}\right].$$

ويمكن حساب المئين ذو الرتبة 100p للإحصاء Y_r من الصيغة الأولى بحل المعادلة:

$$I_{\frac{1}{1+e^{-gx}}}(r,n-r+1)=p.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+e^{-gx}}=B_p(r,n-r+1)$$

حيث $B_p(r,n-r+1)$ يمكن حسابها من جداول بيتا الناقصة.

$$\Rightarrow \quad 1+e^{-gx}=\frac{1}{B_p(r,n-r+1)}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-gx}=\frac{1-B_p(r,n-r+1)}{B_p(r,n-r+1)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{p,r}=\frac{-1}{g}\ln\left[\frac{1-B_p(r,n-r+1)}{B_p(r,n-r+1)}\right]=\frac{1}{g}\ln\left[\frac{B_p(r,n-r+1)}{1-B_p(r,n-r+1)}\right].$$

وفي الحالة الخاصة عندما $r=n$ فإن:

$$F_{n:n}(x) \qquad =[F(x)]^n$$

$$=\left[\frac{1}{1+e^{-gx}}\right]^{n}.$$

وبوضع:

$$\left[\frac{1}{1+e^{-gx}}\right]^{n}=p.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+e^{-gx}}=p^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-gx}=\frac{1-p^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{p,n}=\frac{-1}{g}\ln\left(\frac{1-p^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{1}{n}}}\right)=\frac{1}{g}\ln\left[\frac{p^{\frac{1}{n}}}{1-p^{\frac{1}{n}}}\right].$$

المئين ذو الرتبة $100(1-p)$ للإحصاء Y_1 يحسب كالتالي:

$$F_{1:n}(x)=1-[1-F(x)]^{n}$$

$$=1-\left[1-\frac{1}{1+e^{-gx}}\right]^{n}.$$

وبوضع:

$$1-\left[1-\frac{1}{1+e^{-gx}}\right]^{n}=1-p.$$

$$\Rightarrow \quad \left[1-\frac{1}{1+e^{-gx}}\right]^{n}=p$$

$$\Rightarrow \quad 1-\frac{1}{1+e^{-gx}}=p^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+e^{-gx}}=1-p^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-gx}=\frac{p^{\frac{1}{n}}}{1-p^{\frac{1}{n}}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1-p,1}=-\frac{1}{g}\ln\left(\frac{p^{\frac{1}{n}}}{1-p^{\frac{1}{n}}}\right).$$

لاحظ إن:

$$-x_{1-p,1}=\frac{1}{g}\ln\left(\frac{p^{\frac{1}{n}}}{1-p^{\frac{1}{n}}}\right)=-\frac{1}{g}\ln\left(\frac{1-p^{\frac{1}{n}}}{p^{\frac{1}{n}}}\right)=x_{p,n}.$$

وهذه النتيجة حصلنا عليها لأن التوزيع متماثل حول الصفر.

(ج) التوزيع الاسي القياسي:

لتكن $X_1,X_2,\ldots,X_n$ عينة عشوائية من التوزيع الأسي القياسي بدالة كثافة احتمال:

$$\begin{aligned} f(x)&=e^{-x} \quad , \quad 0<x<\infty,\\ &=0 \quad , \quad e.w. \end{aligned}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء Y_r تعطى كالتالي:

$$g_r(x)=\frac{1}{B(r,n-r+1)}e^{-(n-r+1)x}(1-e^{-x})^{r-1}$$

بينما دالة التوزيع التجميعي تعطى من دالة بيتا الناقصة كالتالي:

$$F_{r:n}(x)=I_{1-e^{-x}}(r,n-r+1).$$

ويمكن حساب المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء Y_r بحل المعادلة:

$$I_{1-e^{-x}}(r,n-r+1)=p.$$

$$\Rightarrow \quad 1-e^{-x}=B_p(r,n-r+1),$$

حيث $B_p(r,n-r+1)$ يمكن حسابها من جداول بيتا الناقصة.

$$\Rightarrow \quad e^{-x}=1-B_p(r,n-r+1)$$

$$\Rightarrow \quad x_{p,r}=-\ln\left[1-B_p(r,n-r+1)\right]=\ln\left[\frac{1}{B(r,n-r+1}\right].$$

وفي الحالة الخاصة عندما $r=n$ فإن:

$$\begin{aligned} F_{n:n}(x)&=\left[F(x)\right]^n\\ &=\left[1-e^{-x}\right]^n. \end{aligned}$$

وبوضع:

$$\left[1-e^{-x}\right]^n=p.$$

$$\Rightarrow \quad 1-e^{-x}=p^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-x}=1-p^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{p,n} = -\ln\left(1-p^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left[\frac{1}{1-p^{\frac{1}{n}}}\right].$$

أما المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء Y_1 فيعطى من المعادلة:

$$1-\left[e^{-x}\right]^n = p.$$

$$\Rightarrow \quad \left[e^{-x}\right]^n = 1-p$$

$$\Rightarrow \quad e^{-x} = (1-p)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{p,1} = -\frac{1}{n}\ln(1-p) = \ln\left[\frac{1}{(1-p)^{\frac{1}{n}}}\right].$$

(د) التوزيع المنتظم القياسي:

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من التوزيع المنتظم القياسي بدالة كثافة احتمال:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \quad , \quad 0 < x < 1, \\ &= 0 \quad , \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

ودالة التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0, \\ x & , \quad 0 < x < 1, \\ 1 & , \quad x \ge 1. \end{cases}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء Y_r تعطى كالتالي:

$$g_r(x) = \frac{1}{B(r, n-r+1)} x^{r-1}(1-x)^{n-r}.$$

بينما دالة التوزيع التجميعي تعطى من دالة بيتا الناقصة حيث:

$$F_{r:n}(x) = I_x(r, n-r+1).$$

ويمكن حساب المئين ذو الرتبة $100p$ للإحصاء Y_r بحل المعادلة:

$$I_x(r, n-r+1) = p.$$

$$\Rightarrow \quad x_{p,r} = B_p(r, n-r+1).$$

وكحالة خاصة عندما $r = n$ فإن:

$$F_{n:n}(x) = \left[F(x)\right]^n = x^n.$$

$$x^n = p \quad \Rightarrow \quad x_{p,n} = p^{\frac{1}{n}}.$$

أما عندما $r = 1$ فإن:

$$F_{1:n}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n = 1 - (1-x)^n$$

$$1 - (1-x)^n = p$$

$$\Rightarrow \quad (1-x)^n = 1 - p$$

$$\Rightarrow \quad 1 - x = (1-p)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{p,1} = 1 - (1-p)^{\frac{1}{n}}.$$

(١-٦) دالة التوزيع المشتركة لإحصاءين ترتيبيين:

دالة التوزيع التجميعي المشتركة للإحصاءين Y_r, Y_s يمكن إيجادها كالتالي:

$$F_{r,s}(x', y') = \int_{-\infty}^{x'} \int_{x}^{y'} g_{r,s}(x,y)\, dy\, dx \quad , \quad x' < y'$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!} \cdot$$

$$\int_{-\infty}^{x'} \int_{x}^{y'} f(x) f(y) [F(x)]^{r-1} [F(y) - F(x)]^{s-r-1} [1 - F(y)]^{n-s}\, dy\, dx.$$

وبالتعويض التالي:

$$t_1 = F(x) \quad , \quad t_2 = F(y)$$

$$dt_1 = f(x) dx \quad , \quad dt_2 = f(y) dy,$$

$$\therefore F_{r,s}(x', y') = C \int_{-\infty}^{F(x')} \int_{t_1}^{F(y')} t_1^{r-1} (t_2 - t_1)^{s-r-1} (1 - t_2)^{n-s}\, dt_1\, dt_2$$

حيث $C = \dfrac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!}$.

والتكامل السابق هو دالة بيتا الثنائية الناقصة. يمكن إثبات إن:

$$F_{r,s}(x,y) = \sum_{j=s}^{n} \sum_{i=r}^{j} \frac{n!}{i!(j-i)!(n-j)!} [F(x)]^i [F(y) - F(x)]^{j-i} [1 - F(y)]^{n-j}.$$

أما إذا كانت $x' > y'$ فإن:

$$F_{r,s}(x', y') = \int_{-\infty}^{y'} \int_{-\infty}^{y} g_{r,s}(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{y'} g_s(y)\, dy$$

$$= F_s(y').$$

أما في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة وإذا كانت $f(x)$ دالة الكتلة الاحتمالية فإن:

$$g_r(x) = P(Y_r = x).$$

ويمكن إيجادها من دالة التوزيع التجميعي:

$$F_{r:n}(x) = I_{F(x)}(r, n-r+1)$$

حيث:

$$g_r(x) = I_{F(x)}(r, n-r+1) - I_{F(x-1)}(r, n-r+1)$$

وبالمثل دالة كثافة الاحتمال المشتركة:

$$\begin{aligned} g_{r,s}(x,y) &= P(Y_r = x, Y_s = y) \\ &= F_{r,s}(x,y) - F_{r,s}(x-1,y) - F_{r,s}(x,y-1) + F_{r,s}(x-1,y-1). \end{aligned}$$

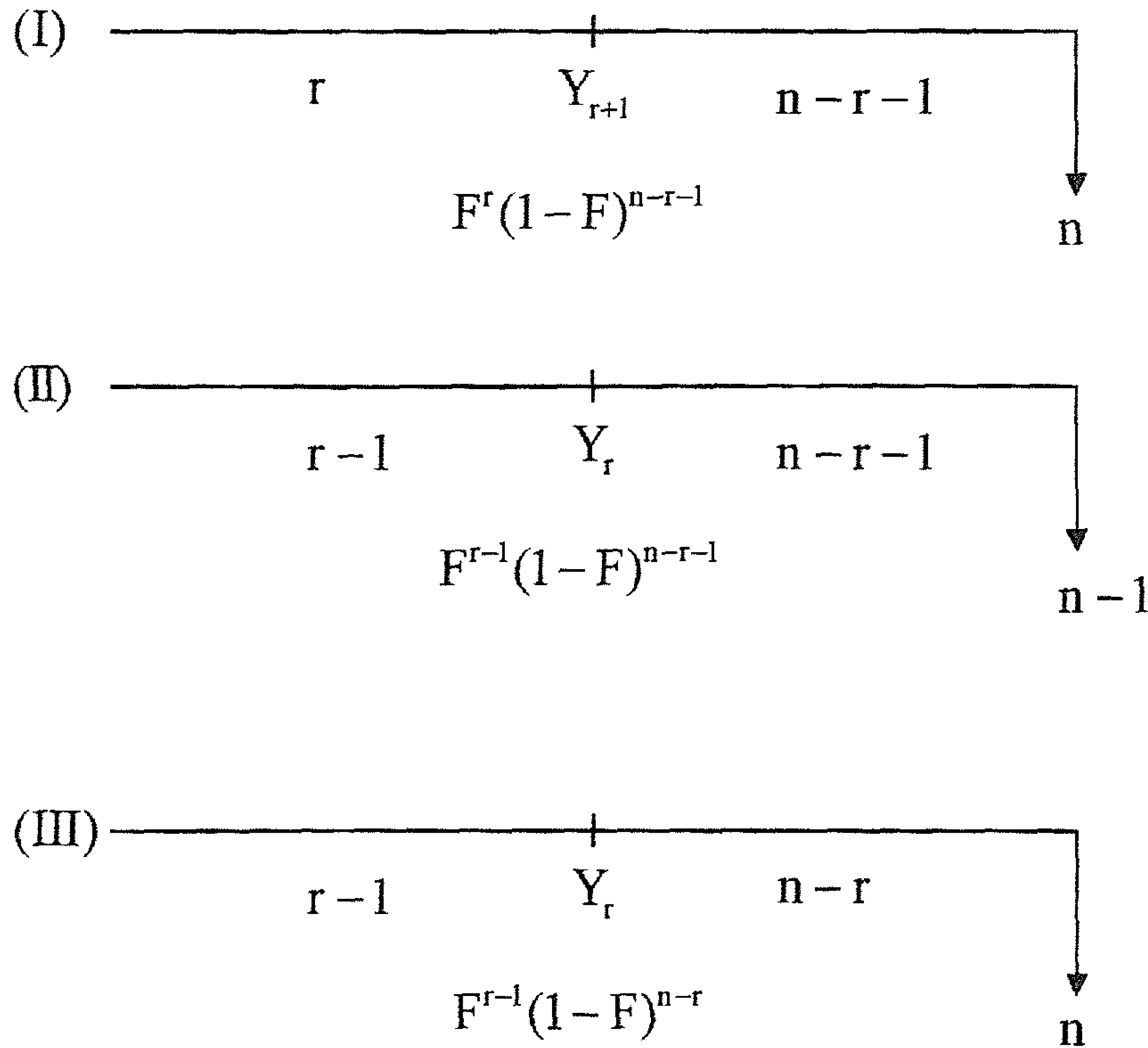
(١-٧) العلاقات التكرارية:

نظرية (١-٧-١):

$$g_{r+1,n}(x) = \frac{n}{r} g_{r,n-1}(x) - \frac{n-r}{r} g_{r,n}(x).$$

البرهان:

للتسهيل سنكتب $F = F(x), f = f(x)$



والآن سنبرهن إن $(I)=(II)-(III)$.

$$F^{r-1}(1-F)^{n-r-1}-F^{r-1}(1-F)^{n-r}=F^{r-1}(1-F)^{n-r-1}\left[1-(1-F)\right]$$
$$=F^{r-1}(1-F)^{n-r-1}F$$
$$=F^{r}(1-F)^{n-r-1}.$$

وبضرب طرفي المعادلة في العامل $\frac{n!}{r!(n-r-1)!}f$ فإن:

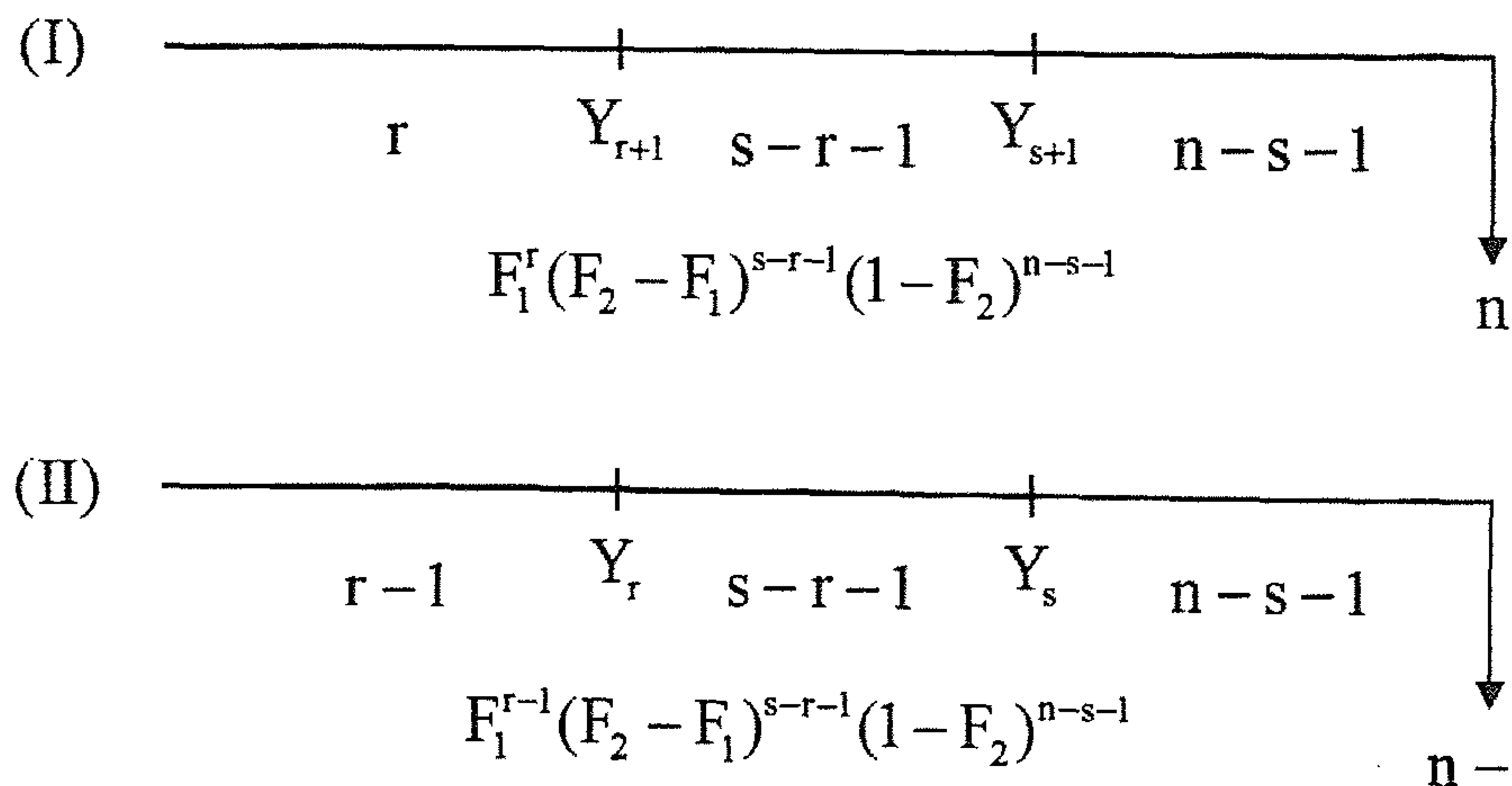
$$\frac{n!}{r!(n-r-1)!}f\,F^{r}(1-F)^{n-r-1}$$
$$=\frac{n!}{r!(n-r-1)!}f\,F^{r-1}(1-F)^{n-r-1}$$
$$-\frac{n!}{r!(n-r-1)!}f\,F^{r-1}(1-F)^{n-r}$$
$$=\frac{n}{r}\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r-1)!}f\,F^{r-1}(1-F)^{n-r-1}$$
$$-\frac{n-r}{r}\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}f\,F^{r-1}(1-F)^{n-r}.$$
$$\therefore g_{r+1,n}(x)=\frac{n}{r}g_{r,n-1}(x)-\frac{n-r}{r}g_{r,n}(x).$$

نظرية (١-٧-٢):

$$g_{r+1,s+1,n}(x,y)=\frac{1}{r}\left[g_{r,s,n-1}(x,y)-(n-s)g_{r,s,n}(x,y)-(s-r)g_{r,s+1,n}(x,y)\right].$$

البرهان:

للتسهيل سنكتب $F_1=F_1(x)\,,F_2=F_2(x)\,,f_1=f_1(x)\,,f_2=f_2(x)$



(III) — $r-1$ | Y_r | $s-r-1$ | Y_s | $n-s$ → n

$$F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s}$$

(IV) — $r-1$ | Y_r | $s-r$ | Y_{s+1} | $n-s-1$ → n

$$F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r}(1-F_2)^{n-s-1}$$

والآن سنبرهن إن $(I)=(II)-(III)-(IV)$

$$\begin{aligned}
&F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s-1}-F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s}\\
&-F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r}(1-F_2)^{n-s-1}\\
&=F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s-1}\left[1-(1-F_2)-(F_2-F_1)\right]\\
&=F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s-1}F_1\\
&=F_1^{r}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s-1}.
\end{aligned}$$

وبضرب طرفي المعادلة في المعامل $\frac{n!}{r!(s-r-1)!(n-s-1)!}f_1 f_2$ فإن:

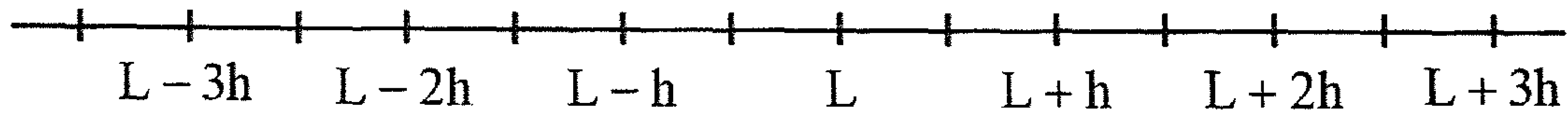
$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s-1)!}f_1 f_2 F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s-1}\\
&-\frac{n-s}{r}\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}f_1 f_2 F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s}\\
&-\frac{s-r}{r}\frac{n!}{(r-1)!(s-r)!(n-s-1)!}f_1 f_2 F_1^{r-1}(F_2-F_1)^{s-r}(1-F_2)^{n-s-1}\\
&=\frac{n!}{r!(s-r-1)!(n-s-1)!}f_1 f_2 F_1^{r}(F_2-F_1)^{s-r-1}(1-F_2)^{n-s-1}.
\end{aligned}$$

ومنها نحصل على العلاقة :

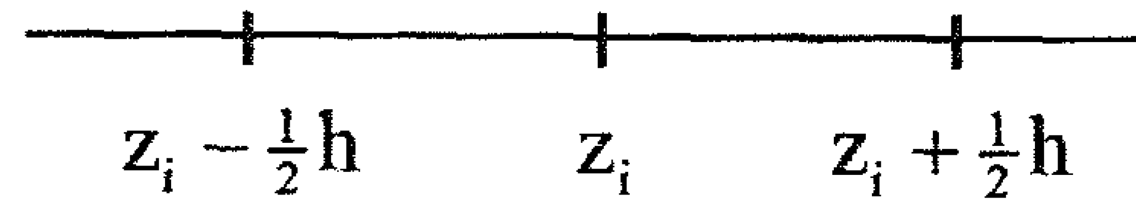
$$g_{r+1,s+1,n}(x,y)=\frac{1}{r}\left[g_{r,s,n-1}(x,y)-(n-s)g_{r,s,n}(x,y)-(s-r)g_{r,s+1,n}(x,y)\right].$$

(١-٨) التوزيعات للاحصاءات الترتيبية في العينات الموضوعة في توزيعات تكرارية The Distributions of Order Statistics in Grouped Sample

بفرض $X_1, X_2, \ldots, X_n$ المشاهدات في عينة عشوائية مختارة من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ وتم ترتيبهم تصاعدياً. كما تم وضع بيانات العينة في فترات لها طول ثابت h حيث حدود الفترات (أو الفئات) هي:



بحيث يتم تغطية محور X من $-\infty$ إلى ∞ و L نقطة البداية. بفرض أن z_i مركز الفئة التي تحتوي على القيمة Y_r .



واحتمال أن Y_r أقل أو يساوي $z_i + \frac{1}{2}h$ هو:

$$P(Y_r \le z_i + \tfrac{1}{2}h) = n\binom{n-1}{r-1}\int_{-\infty}^{z_i+\frac{1}{2}h} [F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r} f(x)\,dx,$$

بنفس الشكل فإن احتمال أن Y_r أقل من أو يساوي $z_i - \frac{1}{2}h$ هو:

$$P(Y_r \le z_i - \tfrac{1}{2}h) = n\binom{n-1}{r-1}\int_{-\infty}^{z_i-\frac{1}{2}h} [F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r} f(x)\,dx.$$

وليكن $C = n\binom{n-1}{r-1}$.

وعلى ذلك الفرق بين العلاقتين يعطي احتمال أن تقع Y_r في الفترة أو الفئة $(z_i - \frac{1}{2}h\,,\, z_i + \frac{1}{2}h)$ وبالمثل:

$$P(Y_r = z_i) = C\int_{F(z_i-\frac{1}{2}h)}^{F(z_i+\frac{1}{2}h)} t^{r-1}(1-t)^{n-r}\,dt$$

$$= I_{F(z_i+\frac{1}{2}h)}(r, n-r+1) - I_{F(z_i-\frac{1}{2}h)}(r, n-r+1).$$

حيث $I_x(p,q)$ هي دالة بيتا الناقصة. ويمكن كتابتها كالتالي:

$$P(Y_r = z_i) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\sum_{j=0}^{n-r}\binom{n-r}{j}(-1)^j\frac{1}{r+j}$$
$$\left\{[F(z_i+\tfrac{1}{2}h)]^{j+r} - [F(z_i-\tfrac{1}{2}h)]^{j+r}\right\}.$$

أو:

$$P(Y_r = z_i) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}(-1)^j \frac{1}{n-r+j+1}$$
$$\left\{\left[1-F(z_i-\tfrac{1}{2}h)\right]^{n-r+j+1} - \left[1-F(z_i+\tfrac{1}{2}h)\right]^{n-r+j+1}\right\}.$$

وكحالة خاصة عندما $r = 1$ فإن:

$$P(Y_1 = z_i) = n\int_{z_i-\frac{1}{2}h}^{z_i+\frac{1}{2}h}\left[1-F(x)\right]^{n-1} f(x)\,dx$$
$$= -\left.\frac{n\left[1-F(x)\right]^n}{n}\right|_{z_i-\frac{1}{2}h}^{z_i+\frac{1}{2}h}$$
$$= \left[1-F(z_i-\tfrac{1}{2}h)\right]^n - \left[1-F(z_i+\tfrac{1}{2}h)\right]^n.$$

ودالة التوزيع تعطى كالتالي:

$$P(Y_1 \le z_i) = n\int_{-\infty}^{z_i+\frac{1}{2}h}\left[1-F(x)\right]^{n-1} f(x)\,dx$$
$$= -\left.\frac{n\left[1-F(x)\right]^n}{n}\right|_{-\infty}^{z_i+\frac{1}{2}h}$$
$$= -\left\{\left[1-F(z_i+\tfrac{1}{2}h)\right]^n - \left[1-F(-\infty)\right]^n\right\}$$
$$= 1-\left[1-F(z_i+\tfrac{1}{2}h)\right]^n.$$

وعندما $r = n$ فإن:

$$P(Y_n = z_i) = n\int_{z_i-\frac{1}{2}h}^{z_i+\frac{1}{2}h}\left[F(x)\right]^{n-1} f(x)\,dx$$
$$= \left.\frac{n\left[F(x)\right]^n}{n}\right|_{z_i-\frac{1}{2}h}^{z_i+\frac{1}{2}h}$$
$$= \left[F(z_i+\tfrac{1}{2}h)\right]^n - \left[F(z_i-\tfrac{1}{2}h)\right]^n.$$

$$P(Y_n \le z_i) = n\int_{-\infty}^{z_i+\frac{1}{2}h}\left[F(x)\right]^{n-1} f(x)\,dx$$

$$= \frac{n\left[F(x)\right]^n}{n}\Bigg|_{-\infty}^{z_i+\frac{1}{2}h}$$

$$= \left[F(z_i + \tfrac{1}{2}h)\right]^n - \left[F(-\infty)\right]^n$$

$$= \left[F(z_i + \tfrac{1}{2}h)\right]^n .$$

نظرية (١-٨-١):

عندما تكون دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ متماثله حول الصفر فإن:

$$P(Y_r = -z_i) = P(Y_{n-r+1} = z_i).$$

البرهان:

$$P(Y_r = -z_i) = I_{F(-z_i+\frac{1}{2}h)}(r, n-r+1) - I_{F(-z_i-\frac{1}{2}h)}(r, n-r+1)$$

$$= \left[1 - I_{1-F(-z_i+\frac{1}{2}h)}(n-r+1, r)\right] - \left[1 - I_{1-F(-z_i-\frac{1}{2}h)}(n-r+1, r)\right]$$

$$= I_{1-F(-z_i-\frac{1}{2}h)}(n-r+1, r) - I_{1-F(-z_i+\frac{1}{2}h)}(n-r+1, r)$$

$$= I_{F(z_i+\frac{1}{2}h)}(n-r+1, r) - I_{F(z_i-\frac{1}{2}h)}(n-r+1, r)$$

$$= P(Y_{n-r+1} = z_i).$$

وعلى ذلك دالة كثافة الاحتمال Y_{n-r+1} هي نفسها دالة كثافة الاحتمال Y_r .

ويمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة لترتيبين إحصاءين للعينات المبوبة بنفس الطريقة كالتالي:

$$P(Y_r = z_i \,,\, Y_s = z_j) = P(z_i - \tfrac{1}{2}h < Y_r < z_i + \tfrac{1}{2}h \,,\, z_j - \tfrac{1}{2}h < Y_s < z_j + \tfrac{1}{2}h)$$

وحيث إن:

$$g_{r,s}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\, f(x)\, f(y)$$
$$\left[F(x)\right]^{r-1}\left[F(y) - F(x)\right]^{s-r-1}\left[1 - F(y)\right]^{n-s}.$$

وليكن : $C = \dfrac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$. فإن

$$P(Y_r = z_i \,,\, Y_s = z_j) = C \int_{z_i-\frac{1}{2}h}^{z_i+\frac{1}{2}h} \int_{z_j-\frac{1}{2}h}^{z_j+\frac{1}{2}h} f(x)\, f(y)$$
$$\left[F(x)\right]^{r-1}\left[F(y) - F(x)\right]^{s-r-1}\left[1 - F(y)\right]^{n-s} dy\, dx.$$

ولتكن :

$w_1 = F(x), w_2 = F(y) \Rightarrow dw_1 = f(x)dx, dw_2 = f(y)dy$ فإن :

x	w_1	y	w_2
$z_i - \frac{1}{2}h$	$F(z_i - \frac{1}{2}h) = h_1$	$z_j - \frac{1}{2}h$	$F(z_j - \frac{1}{2}h) = h_3$
$z_i + \frac{1}{2}h$	$F(z_i + \frac{1}{2}h) = h_2$	$z_j + \frac{1}{2}h$	$F(z_j + \frac{1}{2}h) = h_4$

وبالتعويض في التكامل فإن :

$$P(Y_r = z_i\ ,\ Y_s = z_j) = C\int_{h_1}^{h_2}\int_{h_3}^{h_4} w_1^{r-1}(w_2 - w_1)^{s-r-1}(1-w_2)^{n-s}dw_2dw_1\ .$$

وكحالة خاصة عندما $(r = 1, s = n)$ فإن:

$$\begin{aligned}
P(Y_1 = z_i\ ,\ Y_n = z_j) &= n(n-1)\int_{h_1}^{h_2}\int_{h_3}^{h_4}(w_2 - w_1)^{n-2}dw_2dw_1 \\
&= n\int_{h_1}^{h_2}(w_2 - w_1)^{n-1}\Big|_{h_3}^{h_4} dw_1 \\
&= n\int_{h_1}^{h_2}\left[(h_4 - w_1)^{n-1} - (h_3 - w_1)^{n-1}\right]dw_1 \\
&= -\left[(h_4 - h_2)^n - (h_3 - h_2)^n\right] + \left[(h_4 - h_1)^n - (h_3 - h_1)^n\right] \\
&= (h_4 - h_1)^n - (h_4 - h_2)^n + (h_3 - h_2)^n - (h_3 - h_1)^n.
\end{aligned}$$

(١-٩) أمثلة:

مثال (١-٩-١):

لتكن $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية من الحجم $n = 4$ مسحوبة من توزيع له داله كثافة الاحتمال:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{-x} \quad , \quad 0 < x < \infty, \\
&= 0 \quad , \quad e.w.
\end{aligned}$$

أوجد $P(Y_4 \geq 3)$.

الحل :

نبدأ بإيجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Y_4 كالتالي:

$$F(x) = 1 - e^{-x} \quad , \quad x > 0,$$
$$= 0 \quad , \quad x \leq 0.$$

$$\therefore g_r(y_r) = \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} f(y_r)\left[F(y_r)\right]^{r-1}\left[1 - F(y_r)\right]^{n-r}.$$

بوضع $n = 4, r = 4$ في الصيغة السابقة:

$$\therefore g_4(y_4) = \frac{4!}{3!} f(y_4)\left[F(y_4)\right]^3$$
$$= 4\left(e^{-y_4}\right)\left(1 - e^{-y_4}\right)^3 \quad , \quad 0 < y_4 < \infty,$$
$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

$$\therefore P(Y_4 \geq 3) = 1 - P(Y_4 < 3)$$
$$= 1 - \int_0^3 4e^{-y}\left(1 - e^{-y}\right)^3 dy$$
$$= 1 - 4\left.\frac{\left(1 - e^{-y}\right)^4}{4}\right|_0^3$$
$$= 1 - \left[\left(1 - e^{-3}\right)^4 - (1 - 1)^4\right]$$
$$= 1 - \left(1 - e^{-3}\right)^4 = 0.1847.$$

حل آخر:

يمكن استخدام دالة التوزيع التجميعي للإحصاء الترتيبي Y_4 في إيجاد $P(Y_4 \geq 3)$ كالتالي:

$$F_{4:4}(y_4) = \int_0^{y_4} g_4(y)dy = \int_0^{y_4} 4\, e^{-y}\left(1 - e^{-y}\right)^3 dy$$

ليكن :

$$e^{-y} = u \quad \Rightarrow \quad -y = \ln u \quad \Rightarrow \quad y = \ln\frac{1}{u}$$

وبما أن :

$$0 < y_4 < \infty \quad \Rightarrow \quad 1 < u < e^{-y_4}$$

$$\therefore F_{4:4}(y_4) = \int_1^{e^{-y_4}} -4u(1-u)^3 \frac{(-du)}{u}$$

$$= \int_{1}^{e^{-y_4}} 4(1-u)^3 du$$

$$\therefore F_{4:4}(y_4) = (1-u)^4 \Big|_{1}^{e^{-y_4}}$$

$$= \left(1-e^{-y_4}\right)^4 - (1-1)^4$$

$$= \left(1-e^{-y_4}\right)^4 \quad , \quad y_4 > 0.$$

$$\therefore P(Y_4 \geq 3) = 1 - F_{4:4}(3)$$

$$= 1 - \left(1-e^{-3}\right)^4$$

$$= 0.1847.$$

مثال (١-٩-٢):

لتكن X_1, X_2, X_3 عينة عشوائية من مجتمع يتبع توزيع متصل بدالة كثافة احتمال:

$$f(x) = 2x \quad , \quad 0 < x < 1,$$
$$= 0 \quad , \quad e.w.$$

احسب احتمال أن يكون الإحصاء الترتيبي Y_1 أكبر من وسيط المجتمع ν ؟

الحل:

المطلوب حساب $P(Y_1 \geq u)$، حيث $Y_1 < Y_2 < Y_3$ الإحصاءات الترتيبية وبما أن:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x > 1. \end{cases}$$

دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_1 هي:

$$g_1(y_1) = \frac{3!}{2!\ 0!} f(y_1)\left[F(y_1)\right]^{1-1}\left[1-F(y_1)\right]^2$$

$$= 3(2y_1)\left(1-y_1^2\right)^2$$

$$= 6y_1\left(1-y_1^2\right)^2 \quad , \quad 0 < y_1 < 1,$$

$$= 0 \quad , \quad e.w.$$

والآن نحصل ν على بوضع:

$$F(\nu)=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \nu^2=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \nu=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore P\left(Y_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} 6y\left(1-y^2\right)^2 dy$$

$$= -3\left.\frac{\left(1-y^2\right)^3}{3}\right|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

$$=-\left[(1-1)^3-\left(1-\frac{1}{2}\right)^3\right]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}=0.125.$$

مثال (١-٩-٣):

لتكن دالة كثافة الاحتمال لتوزيع متقطع هي:

$$f(x)=\frac{1}{6} \quad , \quad x=1,2,3,4,5,6,$$
$$=0 \quad , \quad e.w.$$

اثبت أن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_1 من عينة حجمها $n=5$ هي:

$$g_1(y)=\left(\frac{7-y}{6}\right)^5-\left(\frac{6-y}{6}\right)^5, \quad y=1,2,\cdots,6.$$

الحل:

جميع الصيغ التي برهناها سابقاً كانت للتوزيعات المتصلة لذلك لا نستطيع استخدامها بشكل مباشر. لتكن $Y_1<Y_2<Y_3<Y_4<Y_5$ الإحصاءات الترتيبية فإن:

$$F_{1:5}(y)=P(Y_1 \leq y)$$
$$=1-P\left(\text{Min}\{X_1,X_2,\cdots,X_5\}>y\right)$$
$$=1-P\left(X_1>y,X_2>y,\cdots,X_5>y\right)$$
$$=1-[1-F(y)][1-F(y)]\cdots[1-F(y)]$$
$$=1-[1-F(y)]^5,$$

$$F(x)=\frac{x}{6} \quad , \quad y \le x < y+1 \quad , \quad y=1,2,3,4,5$$
$$=0 \quad , \quad y<1,$$
$$=1 \quad , \quad y \ge 6.$$

دالة التوزيع للإحصاء الترتيبي Y_1 هي:

$$\because F_{1:5}(x)=1-\left(1-\frac{x}{6}\right)^5=1-\left(\frac{6-x}{6}\right)^5 \quad , \quad y \le x < y+1 \quad , \quad y=1,2,3,4,5$$
$$=0 \quad , \quad y<1$$
$$=1 \quad , \quad y \ge 6.$$

دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء الترتيبي Y_1 هي:

$$\therefore g_r(y)=F_{1:5}(y)-F_{1:5}(y-1)$$
$$=1-\left(\frac{6-y}{6}\right)^5-1+\left(\frac{6-y+1}{6}\right)^5$$
$$=\left(\frac{7-y}{6}\right)^5-\left(\frac{6-y}{6}\right)^5 \quad , \quad y=1,2,3,4,5,6,$$
$$=0 \quad , \quad e.w.$$

مثال (١-٩-٤):

ليكن $Y_1<Y_2<Y_3<Y_4<Y_5$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها $n=5$ من توزيع متصل له دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ حيث $F'(x)=f(x)$ موجب ومتصل لكل $a<x<b$، برهن بالتكامل لدالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ $Y_1<Y_2<Y_3<Y_4<Y_5$ على y_1, y_3, y_4, y_5 أن دالة الكثافة المشتركة لـ Y_2 هي:

$$g_2(y_2)=20F(y_2)\left[1-F(y_2)\right]^3 f(y_2) \quad , \quad a<y_2<b,$$
$$=0 \quad , \quad e.w.$$

الحل:

$$g(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)=5!f(y_1)f(y_2)f(y_3)f(y_4)f(y_5),$$
$$a<y_1<y_2<y_3<y_4<y_5<b.$$
$$g_2(y_2)=\iiiint g(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)\,dy_1dy_3dy_4dy_5$$
$$=5!f(y_2)\int_a^{y_2} f(y_1)dy_1\int_{y_2}^{b}\int_{y_3}^{b}\int_{y_4}^{b} f(y_3)f(y_4)f(y_5)dy_5dy_4dy_3$$

$$= 5!f(y_2)[F(y_2)-F(a)]\int_{y_2}^{b} f(y_3)f(y_4)[F(b)-F(y_4)]dy_4dy_3$$

$$= 5!f(y_2)F(y_2)\int_{y_2}^{b} f(y_3)\int_{y_3}^{b} f(y_4)(1-F(y_4))\, dy_4dy_3$$

$$= 5!f(y_2)F(y_2)\int_{y_2}^{b} f(y_3)\left.\frac{[1-F(y_4)]^2}{-2}\right|_{y_3}^{b} dy_3$$

$$= \frac{5!}{2}f(y_2)F(y_2)\int_{y_2}^{b} f(y_3)[-[1-F(b)]^2+[1-F(y_3)]^2\}dy_3$$

$$= \frac{5!}{2}f(y_2)F(y_2)\int_{y_2}^{b} f(y_3)[1-F(y_3)]^2 dy_3$$

$$= \frac{5!}{2}f(y_2)F(y_2)\left.\frac{[1-F(y_3)]^3}{-3}\right|_{y_2}^{b}$$

$$= \frac{5!}{2.3}f(y_2)F(y_2)\left[[1-F(y_2)]^3-[1-F(b)]^3\right].$$

$$= \frac{5!}{2.3}f(y_2)F(y_2)[1-F(y_2)]^3$$

$$= 20\, f(y_2)F(y_2)[1-F(y_2)]^3 \quad , \quad a < y_2 < b,$$

$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

مثال (١-٩-٥):

لتكن $Y_1 < Y_2 < Y_3 < Y_4 < Y_5$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها $n = 5$ من توزيع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = 3x^2 \quad , \quad 0 < x < 1,$$
$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

برهن أن $Z_1 = \frac{Y_2}{Y_4}, Z_2 = Y_4$ مستقلان إحصائياً.

الحل:

$$T: \quad z_1 = \frac{y_2}{y_4} \qquad , \quad z_2 = y_4$$

$$T^{-1}: \quad y_2 = z_1 z_2 \qquad , \quad y_4 = z_2$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial z_1} & \frac{\partial y_4}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 & z_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = z_2,$$

$$\begin{aligned} F(x) &= x^3 \quad , \quad 0 \le x \le 1, \\ &= 0 \quad , \quad x < 0, \\ &= 1 \quad , \quad x > 1. \end{aligned}$$

$$\because g_{i,j}(y_i, y_j) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} f(y_i) f(y_j) [F(y_i)]^{i-1}.$$

$$[F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} [1 - F(y_j)]^{n-j}, \quad 0 < y_i < y_j < 1,$$

بوضع $i = 2$, $j = 4$ في المعادلة السابقة نحصل على:

$$g_{2,4}(y_2, y_4) = \frac{5!}{1!\ 1!\ 1!} (3y_2^2)(3y_4^2)(y_2^3)^{2-1} (y_4^3 - y_2^3)^{4-2-1} (1 - y_4^3)^{5-4}$$

$$= 1080\, y_2^5 y_4^2 (y_4^3 - y_2^3)(1 - y_4^3), \quad 0 < y_2 < y_4 < 1.$$

$$\therefore h(z_1, z_2) = |J| g_{2,4}(z_1 z_2, z_2)$$

$$= 1080\, z_2 (z_1 z_2)^5 (z_2)^2 \left[z_2^3 - (z_1 z_2)^3 \right] (1 - z_2^3)$$

$$= 1080\, z_1^5 z_2^{11} (1 - z_1^2)(1 - z_2^3), \qquad 0 < z_1 < 1, 0 < z_2 < 1.$$

$$\therefore h_1(z_1) = \int_0^1 1080\, z_1^5 z_2^{11} (1 - z_1^3)(1 - z_2^3)\, dz_2$$

$$= 1080\ z_1^5 (1 - z_1^3) \int_0^1 z_2^{11} (1 - z_2^3)\, dz_2$$

$$= 1080\ z_1^5 (1 - z_1^3) \left[\int_0^1 z_2^{11} dz_2 - \int_0^1 z_2^{14} dz_2 \right]$$

$$=1080\, z_1^5\left(1-z_1^3\right)\left[\left.\frac{z_2^{12}}{12}\right|_0^1-\left.\frac{z_2^{15}}{15}\right|_0^1\right]$$

$$=1080\, z_1^5\left(1-z_1^3\right)\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{15}\right)=18z_1^5\left(1-z_1^3\right),\ 0<z_1<1,$$

$$=0 \qquad , \text{ e.w.}$$

$$h_2(z_2) \quad =1080z_2^{11}\left(1-z_2^3\right)\int_0^1 z_1^5\left(1-z_1^3\right)dz_1$$

$$=1080\, z_2^{11}\left(1-z_2^3\right)\left[\int_0^1 z_1^5 dz_1-\int_0^1 z_1^8 dz_1\right]$$

$$=1080\, z_2^{11}\left(1-z_2^3\right)\left[\left.\frac{z_1^6}{6}\right|_0^1-\left.\frac{z_1^9}{9}\right|_0^1\right]$$

$$=60\, z_2^{11}\left(1-z_2^3\right) \quad , \quad 0<z_2<1,$$

$$=0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

نجد إن:

$$h(z_1,z_2)=h_1(z_1)h_2(z_2)$$

$\therefore$ Z_1, Z_2 مستقلين إحصائياً.

مثال (١-٩-٦):

أوجد احتمال أن مدى العينة العشوائية من الحجم $n=4$ أقل من $\frac{1}{2}$ حيث العينة مسحوبة من توزيع منتظم له دالة الكثافة الاحتمالية:

$$f(x)=1 \quad , \quad 0<x<1,$$
$$=0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

واوجد المتوسط والتباين لمدى العينه.

الحل:

المطلوب حساب:

$$P\left(Z_1\le\frac{1}{2}\right), \quad Z_1=Y_4-Y_1$$

$$F(x)=x \quad , \quad 0\le x<1,$$
$$=0 \quad , \quad x<0,$$
$$=1 \quad , \quad x\ge 1.$$

$$g_{1,4}(y_1, y_4) = \frac{4!}{(1-1)!(4-1-1)!(4-4)!}(1)(1)[y_4 - y_1]^2$$

$$= \frac{4!}{2!}(y_4 - y_1)^2$$

$$= 12(y_4 - y_1)^2, \quad 0 \le y_1 < y_4 \le 1,$$

$$= 0 \qquad , \quad \text{e.w.}$$

$$T: \quad z_1 = y_4 - y_1 \quad , \quad z_2 = y_1,$$

$$T^{-1}: \quad y_1 = z_2 \quad , \quad y_4 = z_1 + z_2.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial y_4}{\partial z_1} & \frac{\partial y_4}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$h(z_1, z_2) = |J| g_{1,4}(z_2, z_1 + z_2)$$

$$= 12(z_1 + z_2 - z_2)^2$$

$$= 12 z_1^2 \quad , \quad 0 < z_1 < 1, \; 0 < z_2 < 1 - z_1.$$

$$\therefore h(z_1) = \int_0^{1-z_1} 12 z_1^2 \, dz_2 = 12(1 - z_1) z_1^2 \quad , \quad 0 < z_1 < 1,$$

$$= 0 \qquad , \quad \text{e.w.}$$

$$P\left(Z_1 \le \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 12(1 - z_1) z_1^2 dz_1$$

$$= 12\left[\int_0^{\frac{1}{2}} z_1^2 dz_1 - \int_0^{\frac{1}{2}} z_1^3 dz_1\right]$$

$$= 12\left[\frac{z_1^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}} - \frac{z_1^4}{4}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 12\left[\frac{1}{3}\,\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{16}\right]$$

$$= \frac{5}{16}.$$

وفيما يلي طريقة أخرى لإيجاد $P\left(Z_1 \le \frac{1}{2}\right)$ وذلك باستخدام دالة التوزيع التجميعي للمتغير Z_1:

$$G(z_1)=\int_0^{z_1}12t^2\ (1-t)dt$$
$$=12\int_0^{z_1}\left(t^2-t^3\right)dt$$
$$=4z_1^3-3z_1^4\ ,\quad 0<z_1<1$$
$$=0\ ,\quad z_1<0$$
$$=1\ ,\quad z_1>1$$

$$P\left(Z_1<\frac{1}{2}\right)=G\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=4\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$=\frac{5}{16}.$$

$$E(Z_1)=12\int_0^1 z_1^3(1-z_1)dz_1=12\left[\int_0^1 z_1^3dz_1-\int_0^1 z_1^4dz_1\right]$$
$$=12\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right]=\frac{3}{5}.$$

$$E(Z_1)^2=12\int_0^1(1-z_1)z_1^4dz_1=12\left[\int_0^1 z_1^4dz_1-\int_0^1 z_1^5dz_1\right]$$
$$=12\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{5},$$

$$Var(Z_1)=\frac{2}{5}-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{1}{25}.$$

مثال (١-٩-٧):

ليكن $Y_1<Y_2<Y_3$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية من $n=3$ مسحوبة من توزيع له دالة كثافة الاحتمال:

$$F(x)=2x\ ,\quad 0<x<1,$$
$$=0\ ,\quad e.w.$$

برهن أن المتغيرات $Z_1=\frac{Y_1}{Y_2}\ ,\ Z_2=\frac{Y_2}{Y_3}\ ,\ Z_3=Y_3$ مستقلة إحصائياً.

الحل:

$$T: \quad z_1 = \frac{y_1}{y_2} \quad , \quad z_2 = \frac{y_2}{y_3} \quad , \quad z_3 = y_3$$

$$T^{-1}: \quad y_1 = z_1 z_2 z_3 \quad , \quad y_2 = z_2 z_3 \quad , \quad y_3 = z_3.$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial z_1} & \frac{\partial y_1}{\partial z_2} & \frac{\partial y_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial z_1} & \frac{\partial y_2}{\partial z_2} & \frac{\partial y_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial z_1} & \frac{\partial y_3}{\partial z_2} & \frac{\partial y_3}{\partial z_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_2 z_3 & z_1 z_3 & z_1 z_2 \\ 0 & z_3 & z_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= z_2 z_3^2.$$

$$\therefore g(y_1, y_2, y_3) = 3! f(y_1) f(y_2) f(y_3)$$
$$= 6(2y_1)(2y_2)(2y_3)$$
$$= 48 y_1 y_2 y_3 \quad , \quad 0 \le y_1 < y_2 < y_3 \le 1,$$
$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

$$h(z_1, z_2, z_3) = |J| g(z_1 z_2 z_3, z_2 z_3, z_3)$$
$$= (z_2 z_3^2) 48 (z_1 z_2 z_3)(z_2 z_3)(z_3)$$
$$= 48 z_1 z_2^3 z_3^5 \quad , \quad 0 < z_i < 1, \quad i = 1,2,3.$$

$$\therefore h_1(z_1) = \int_0^1 \int_0^1 48 z_1 z_2^3 z_3^5 \, dz_2 dz_3$$
$$= 48 \frac{1}{4} \frac{1}{6} z_1 \quad , \quad 0 < z_1 < 1$$

$$\therefore h_1(z_1) = \begin{cases} 2 z_1 & , \quad 0 \le z_1 \le 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

$$h_2(z_2) = 48 z_2^3 \int_0^1 z_1 dz_1 \int_0^1 z_3^5 dz_3$$
$$= 48 \frac{1}{2} \frac{1}{6} z_2^3$$

$$h_2(z_2) = \begin{cases} 4 z_2^3 & , \quad 0 \le z_2 \le 1, \\ 0 & , \quad \text{e.w.} \end{cases}$$

$$h_3(z_3)=48z_3^5\int_0^1 z_1dz_1\int_0^1 z_2^3dz_2$$
$$=48\,z_3^5\frac{1}{2}\frac{1}{4}$$
$$=6\,z_3^5 \quad , \quad 0\le z_3\le 1,$$
$$=0 \quad , \quad \text{e.w.}$$
$$\therefore h(z_1,z_2,z_3)=h_1(z_1)h_2(z_2)h_3(z_3)$$

أي أن المتغيرات Z_1,Z_2,Z_3 مستقلة.

مثال (١-٩-٨):

إذا سحبت عينة عشوائية من الحجم $n=2$ من توزيع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=2(1-x) \quad , \quad 0<x<1$$
$$=0 \quad , \quad \text{ew.}$$

أوجد $P(2Y_1<Y_2)$.

الحل:

$$g_{1,2}(y_1,y_2)=\frac{2!}{0!0!0!}f(y_1)f(y_2)\left[F(y_1)\right]^0\left[F(y_2)-F(y_1)\right]^0\left[1-F(y_2)\right]^0$$
$$=2\left[2(1-y_1)\right]\left[2(1-y_2)\right]$$
$$=8(1-y_1)(1-y_2) \quad , \quad 0<y_1<y_2<1,$$
$$=0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

$$\therefore P(2Y_1<Y_2)=\int_0^1\int_0^{\frac{y_2}{2}}8(1-y_1)(1-y_2)dy_1dy_2$$
$$=-\int_0^1 8(1-y_2)\frac{(1-y_1)^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{y_2}{2}}dy_2$$
$$=-\int_0^1 4(1-y_2)\left[\left(1-\frac{y_2}{2}\right)^2-1\right]dy_2$$
$$=-\int_0^1(1-y_2)\left[(2-y_2)^2-4\right]dy_2$$

$$= -\int_0^1 (1-y_2)\left(y_2^2 - 4y_2\right)dy_2$$

$$= \int_0^1 \left(y_2^3 - 5y_2^2 + 4y_2\right)dy_2$$

$$= \left(\frac{y_2^4}{4} - \frac{5}{3}y_2^3 + \frac{4}{2}y_2^2\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} + 2 - \frac{5}{3} = \frac{7}{12}.$$

مثال (١-٩-٩):

إذا كان X_1, X_2, X_3, X_4 تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة احتمال:

$$f(x) = 3x^2 \quad , \quad 0 < x < 1,$$
$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

أوجد:

أ) دالة كثافة الاحتمال لأصغر قيمة من قيم هذه العينة Y_1 ثم أوجد متوسطها.

ب) دالة كثافة الاحتمال لأكبر قيمة من قيم هذه العينة Y_4 وأوجد تباينها.

ج) دالة كثافة الاحتمال المشتركة بين Y_2, Y_3 ومعامل الارتباط بين Y_2, Y_3.

الحل:

أ)

$$F(x) = \int_0^x 3t^2 dt = x^3,$$

$$\therefore F(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 1. \end{cases}$$

$$\therefore g_1(y_1) = 4\left(1-y_1^3\right)^3 3y_1^2 = 12y_1^2\left(1-y_1^3\right)^3 \qquad , \quad 0 < y_1 < 1.$$
$$= 0 \qquad , \quad \text{e.w.}$$

$$E(Y_1)=\int_0^1 12y_1^3\left(1-y_1^3\right)^3 dy_1$$

$$=\int_0^1 12\left(y_1^3-3y_1^6+3y_1^9-y_1^{12}\right)dy_1$$

$$=12\left(\frac{y_1^4}{4}-\frac{3}{7}y_1^7+\frac{3}{10}y_1^{10}-\frac{y^{13}}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=3-\frac{36}{7}+\frac{36}{10}-\frac{12}{3}=0.534.$$

ب)

$$g_4(y_4)=4\left(y_4^3\right)^3 3y_4^2=12y_4^{11} \quad , \quad 0<y_4<1,$$
$$=0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

$$\text{Var}(Y_4)=E\left(Y_4^2\right)-\left[E(Y_4)\right]^2.$$

$$E\left(Y_4^2\right)=\int_0^1 12y_4^2 y_4^{11}dy_4=12\int_0^1 y_4^{13}dy_4=12\frac{y_4^{14}}{14}\Bigg|_0^1=\frac{12}{14}$$

$$E(Y_4)=\int_0^1 12y_4 y_4^{11}dy_4=12\int_0^1 y_4^{12}dy_4=12\frac{y_4^{13}}{13}\Bigg|_0^1=\frac{12}{13}=0.923,$$

$$\therefore \text{Var}(Y_4)=0.857-[0.923]^2$$
$$=0.857-0.852=0.005.$$

ج)

$$g_{2,3}(y_2,y_3)=\frac{4!}{1!0!1!}\left(3y_2^2\right)\left(3y_3^2\right)\left(y_2^3\right)^1\left(y_3^3-y_2^3\right)^0\left(1-y_3^3\right)^1$$
$$=216\,y_2^5\,y_3^2\left(1-y_3^3\right) \quad , \quad 0<y_2<y_3<1,$$
$$=0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

لإيجاد ρ_{23} نتبع الآتي:

$$\rho_{23}=\frac{\sigma_{23}}{\sigma_2\cdot\sigma_3}=\frac{E(Y_2Y_3)-E(Y_2)E(Y_3)}{\left\{E\left(Y_2^2\right)-\left[E(Y_2)\right]^2\right\}\cdot\left\{E\left(Y_3^2\right)-\left[E(Y_3)\right]^2\right\}},$$

$$g_2(y_2)=\frac{4!}{2!\;1!}3y_2^2\left(y_2^3\right)\left(1-y_2^3\right)^2$$
$$=36\,y_2^5\left(1-y_2^3\right)^2 \quad , \quad 0<y_2<1,$$
$$=0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

$$E(Y_2) = \int_0^1 36y_2\, y_2^5 (1-y_2^3)^2\, dy_2$$

$$= 36\int_0^1 y_2^6 (1-2y_2^3 + y_2^6) dy_2$$

$$= 36\left[\frac{y_2^7}{7} - 2\frac{y_2^{10}}{10} + \frac{y_2^{13}}{13}\right]_0^1 = .712,$$

$$E(Y_2^2) = 36\int_0^1 y_2^7 (1-y_2^3)^2\, dy_2$$

$$= 36\left[\frac{y_2^8}{8} - \frac{2y_2^{11}}{11} + \frac{y_2^{14}}{14}\right]_0^1 = 0.52,$$

$$g_3(y_3) = \frac{4!}{2!\ 1!} 3y_3^2 (y_3^3)^2 (1-y_3^3)$$

$$= 36\ y_3^8 (1-y_3^3) \quad , \quad 0 < y_3 < 1,$$

$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

$$E(Y_3) = 36\int_0^1 y_3^9 (1-y_3^3) dy_3 = 36\left(\frac{y_3^{10}}{10} - \frac{y_3^{13}}{13}\right)\Bigg|_0^1 = .831$$

$$E(Y_3^2) = 36\int_0^1 y_3^{10} (1-y_3^3) dy_3 = 36\left(\frac{y_3^{11}}{11} - \frac{y_3^{14}}{14}\right)\Bigg|_0^1 = 0.701,$$

$\sigma_2^2 = 0.013, \qquad \sigma_2 = 0.1143,$

$\sigma_3^2 = 0.0104, \qquad \sigma_3 = 0.1022,$

$$E(Y_2Y_3) = \int_0^1\int_0^{y_3} 216 (y_2^6 y_3^3 - y_2^6 y_3^6) dy_2 dy_3$$

$$= \frac{216}{7}\int_0^1 (y_2^7 y_3^3 - y_2^7 y_3^6)\Big|_0^{y_3} dy_3$$

$$= \frac{216}{7}\int_0^1 (y_3^{10} - y_3^{13}) dy_3$$

$$= \frac{216}{7}\left(\frac{1}{11} - \frac{1}{14}\right) = 0.601,$$

$$Cov(Y_2, Y_3) = \sigma_{23} = E(Y_2Y_3) - [E(Y_2)E(Y_3)] = 0.00328,$$

$$\rho_{23} = \frac{\sigma_{23}}{\sigma_2\sigma_3} = 0.79853.$$

مثال (١-٩-١٠):

لتكن $X_1, X_2, \cdots, X_5$ تمثل قياسات عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع ذا توزيع أسي قياسي أوجد مايلي:

أ) دالة كثافة الاحتمال لأصغر قيمة من قيم هذه العينة ثم أوجد تباينها.

ب) دالة كثافة الاحتمال لأكبر قيمة من قيم هذه العينة ثم أوجد متوسطها.

ب) دالة كثافة الاحتمال لوسيط هذه العينة ثم أوجد القيمة المتوقعة للوسيط.

الحل:

أ)

$$f(x) = e^{-x} \quad , \quad x \geq 0$$
$$= 0 \quad , \quad e.w.$$
$$F(x) = 1 - e^{-x} \quad , \quad x > \infty$$
$$= 0 \quad , \quad e.w.$$
$$\therefore g_1(y_1) = 5\, e^{-y_1}\left(e^{-y_1}\right)^4 = 5e^{-5y_1}, \quad y_1 \geq 0.$$
$$E(Y_1) = \int_0^\infty y_1 g_1(y_1) dy_1$$
$$= 5\int_0^\infty y_1 e^{-5y_1} dy_1$$
$$= 5\frac{\Gamma(2)}{5^2} = \frac{1}{5} = 0.2.$$
$$E\left(Y_1^2\right) = 5\int_0^\infty y_1^2 e^{-5y} dy_1$$
$$= 5\ \frac{\Gamma(3)}{5^3} = \frac{2}{25}$$
$$Var(Y_1) = \frac{2}{25} - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

(ب)

$$g_5(y_5) = 5e^{-y_5}\left(1 - e^{-y_5}\right)^4 \quad , \quad 0 < y_5 < \infty$$
$$= 0 \quad , \quad e.w.$$

$$E(Y_5) = 5\int_0^\infty y_5\, e^{-y_5}\left(1-e^{-y_5}\right)^4 dy_5$$

يحسب $E(Y_5)$ كتمرين.

ج)

$$g_3(y_3) = \frac{5!}{2!\ 2!} f(y_3)\left[F(y_3)\right]^2\left[1-F(y_3)\right]^2$$

$$= 30e^{-3y_3}\left(1-e^{-y_3}\right)^2 \qquad , \quad 0 < y_3 < \infty,$$

$$= 0 \qquad , \quad \text{e.w.}$$

$$E(Y_3) = 30\int_0^\infty y_3 e^{-3y_3}\left(1-e^{-y_3}\right)^2 dy_3.$$

يحسب $E(Y_3)$ كتمرين.

الباب الثاني

توزيعات دوال في الإحصاءات الترتيبية

عموماً من دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءات الترتيبية وباستخدام طريقة التحويل الاعتيادية يمكن إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية لأي دالة في الإحصاءات الترتيبية ومثال على ذلك المدى ومنتصف المدى غيرها...

(٢-١) توزيع المدى:

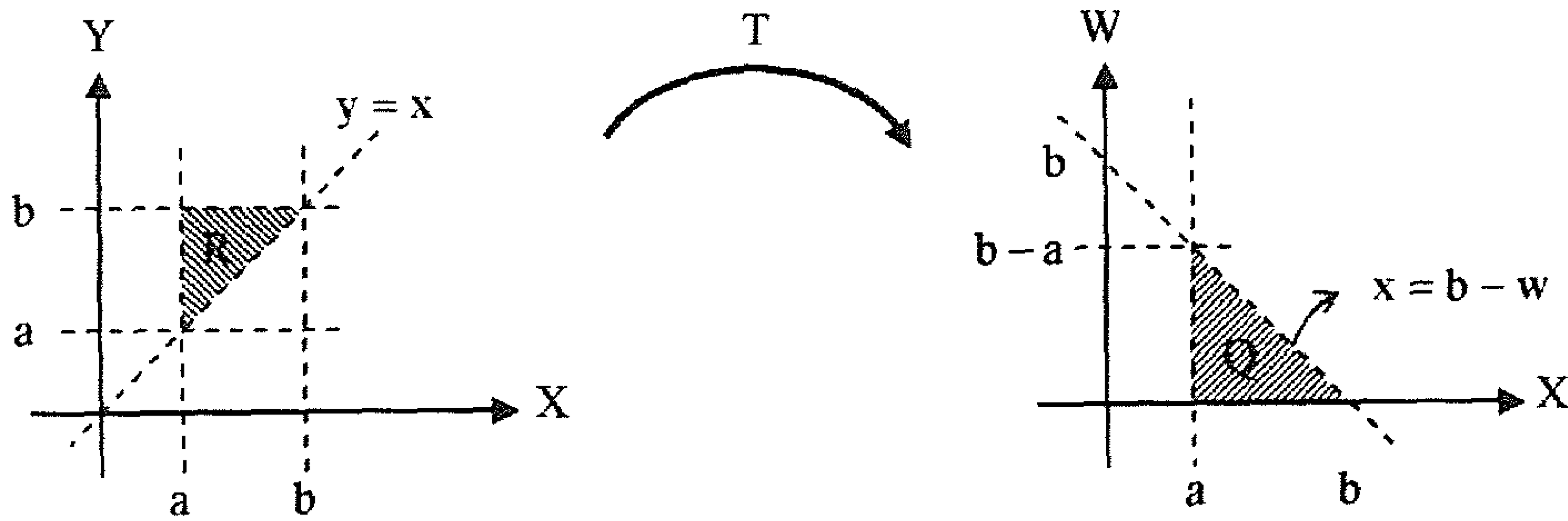
يمكن تعريف المدى بين أي إحصاءين Y_r, Y_s بأنه $W = Y_s - Y_r$ حيث $r < s$ وعندها يمكن إيجاد توزيع W باستخدام التحويل:

$$T: \quad x = x \quad , \quad w = y - x$$

حيث $x = y_r\ , y = y_s$ والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = x \quad , \quad y = x + w,$$

ومنه يمكن حساب الجاكوبيان $J = 1$ ولاحظ إن المتغيران x, y معرفان على الفضاء $R = \{(x,y) | a \le x < y \le b\}$ والممثلة في الرسم ومحدودة بالمستقيمات $x = a, y = b, x = y$.
بينما المتغيران x, w الناتجان بالتحويل T معرفان على الفضاء $Q = \{(x,w) | a \le x < x + w \le b\}$ والممثلة بالمنطقة المحصورة بين المستقيمات $x = a, x + w = b, w = 0$.



ومن دالة كثافة الاحتمال المشتركة التاليه:

$$g_{r,s}(x,y) = Cf(x)\ f(y)[F(x)]^{r-1}[F(y) - F(x)]^{s-r-1}[1 - F(y)]^{n-s}$$
$$, \quad a \le x < y \le b.$$

حيث $C = \dfrac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$ ، فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ W, Y_r هي:

$$h_{r,s}(x,w) = Cf(x)\ f(x+w)[F(x)]^{r-1}$$
$$[F(x+w) - F(x)]^{s-r-1}[1 - F(x+w)]^{n-s} \quad , \quad a \le x < x + w \le b$$
$$= 0 \quad , \quad e.w.$$

أما دالة كثافة الاحتمال المطلوبة للمدى W فنحصل عليها بالتكامل على x كالتالي:

$$K_{r,s}(w) = C\int_{a}^{b-w}[F(x)]^{r-1}[F(x+w)-F(x)]^{s-r-1}[1-F(x+w)]^{n-s}$$
$$f(x)\,f(x+w)dx \quad , \quad 0 \le w \le b-a,$$
$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

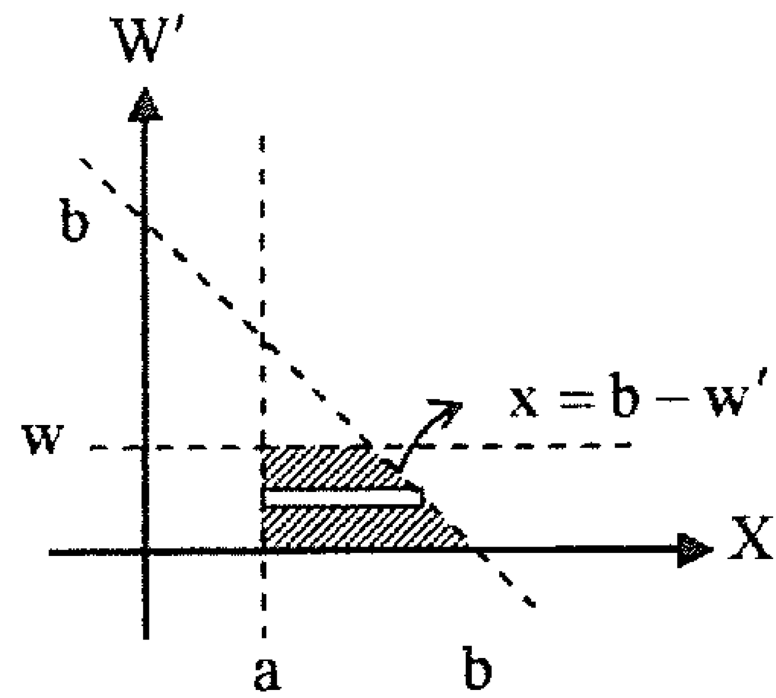
وكحالة خاصة ومهمة جداً عندما $r = 1, s = n$ نحصل على مدى العينة $W = Y_n - Y_1$ (الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في العينة) ودالة كثافة الاحتمال له هي:

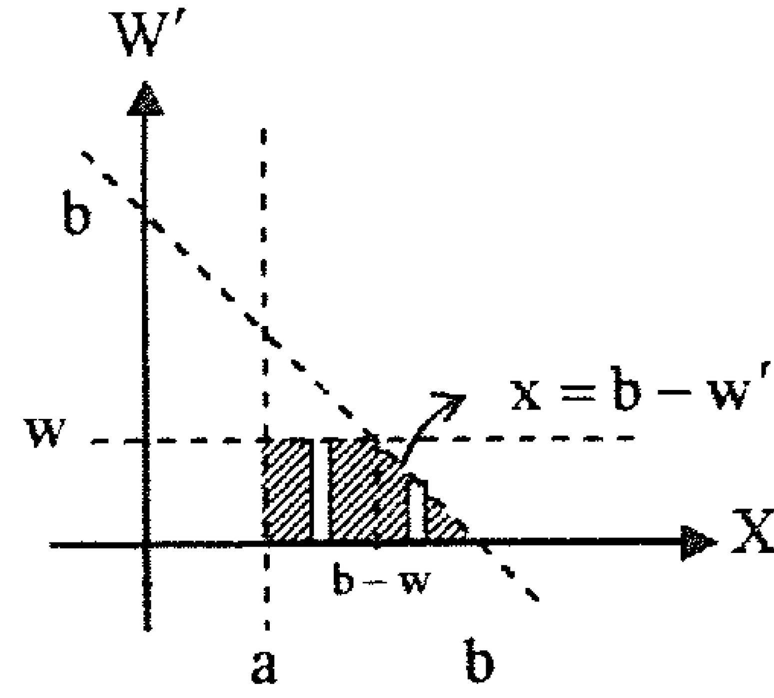
$$K_{1,n}(w) = n(n-1)\int_{a}^{b-w}[F(x+w)-F(x)]^{n-2}f(x)\,f(x+w)dx$$
$$, \quad 0 \le w \le b-a,$$
$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

ومنها يمكن حساب دالة التوزيع التجميعي كالتالي:

$$F_W(w) = n(n-1)\int_{0}^{w}\int_{a}^{b-w'}[F(x+w')-F(x)]^{n-2}f(x)\,f(x+w')dx\,dw'.$$

والآن سنقوم بالتبديل بين التكاملين (لاحظ إن حدود التكامل الأول تعتمد على المتغير w')





$$\therefore F_W(w) = n(n-1)\int_{a}^{b-w}f(x)\int_{0}^{w}[F(x+w')-F(x)]^{n-2}\,f(x+w')dw'dx$$
$$+n(n-1)\int_{b-w}^{b}f(x)\int_{0}^{b-x}[F(x+w')-F(x)]^{n-2}\,f(x+w')dw'dx$$
$$= n\int_{a}^{b-w}f(x)[F(x+w')-F(x)]^{n-1}\Big|_{0}^{w}dx$$
$$+n\int_{b-w}^{b}f(x)[F(x+w')-F(x)]^{n-1}\Big|_{0}^{b-x}dx$$
$$= n\int_{a}^{b-w}f(x)[F(x+w)-F(x)]^{n-1}dx + n\int_{b-w}^{b}f(x)[F(b)-F(x)]^{n-1}dx$$
$$= n\int_{a}^{b-w}f(x)[F(x+w)-F(x)]^{n-1}dx + n\int_{b-w}^{b}f(x)[1-F(x)]^{n-1}dx$$

$$= n\int_a^{b-w} f(x)[F(x+w)-F(x)]^{n-1}dx - [1-F(x)]^n\Big|_{b-w}^{b}.$$

$$\therefore F_W(w) = n\int_a^{b-w} f(x)[F(x+w)-F(x)]^{n-1}dx + [1-F(b-w)]^n$$

$$, \quad 0 \le w \le b-a,$$

$$= 0 \qquad w < 0$$

$$= 1 \qquad w \ge b-a$$

ولاحظ إنه عندما $b=\infty$ فإن الحد $[1-F(b-w)]^n$ يتلاشى.

مثال (٢-١-١):

إذا كانت العينة العشوائية مسحوبة من توزيع منتظم $X \sim U(0,1)$ أوجد توزيع المدى $W = Y_s - Y_r$ وتوزيع المدى للعينة.

الحل:

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءين Y_r, Y_s هي:

$$g_{r,s}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}x^{r-1}(y-x)^{s-r-1}(1-y)^{n-s}$$

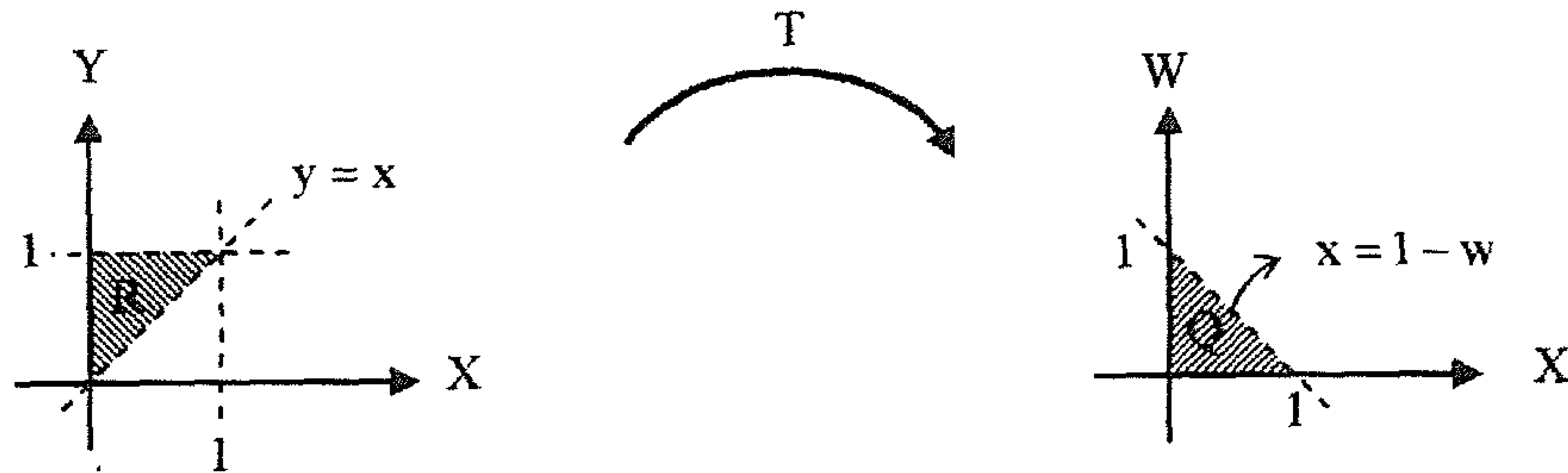
$$, \quad 0 \le x < y \le 1.$$

ولنأخذ التحويلة:

$$T: \quad x = x \quad , \quad w = y - x,$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = x \quad , \quad y = x + w$$



والجاكوبيان لهذه التحويلة $J=1$، وبالتالي فإن دالة الكثافة المشتركة لـ W, Y_r هي:

$$h_{r,s}(x,w) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}x^{r-1}w^{s-r-1}(1-w-x)^{n-s}$$

$$, \quad a \le x < x + w \le b,$$

$$= 0 \qquad , \quad e.w.$$

ومنها نوجد دالة كثافة الاحتمال للمدى W كالتالي:

$$K_{r,s}(w)=\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}w^{s-r-1}\int_0^{1-w} x^{r-1}(1-w-x)^{n-s}dx.$$

ولنأخذ التعويض:

$$x=v(1-w) \quad \Rightarrow \quad v=\frac{x}{1-w} \quad , \quad dx=(1-w)dv.$$

$$\therefore K_{r,s}(w)=\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}w^{s-r-1}$$

$$\int_0^1 v^{r-1}(1-w)^{r-1}(1-w-v(1-w))^{n-s}dx$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}w^{s-r-1}(1-w)^{n-s+r}\int_0^1 v^{r-1}(1-v)^{n-s}dv$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}w^{s-r-1}(1-w)^{n-s+r}\ B(r,n-s+1)$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\frac{(r-1)!(n-s)!}{(n-s+r)!}w^{s-r-1}(1-w)^{n-s+r}$$

$$=\frac{n!}{(s-r-1)!(n-s+r)!}w^{s-r-1}(1-w)^{n-s+r}$$

$$=\frac{w^{s-r-1}(1-w)^{n-s+r}}{B(s-r,n-s+r+1)}, \quad 0\le w\le 1,$$

$$=0 \qquad , \quad e.w.$$

أي أنه يتبع توزيع بيتا بالمعالم $\alpha=s-r$, $\beta=n-s+r+1$. ولإيجاد توزيع مدى العينة نكتفي بوضع $r=1,s=n$ ونحصل على:

$$K_{1,n}(w)=n(n-1)w^{n-2}(1-w) \quad , \quad 0\le w\le 1,$$

$$=0 \qquad , \quad e.w.$$

ويمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعي كالتالي:

$$F_W(w)=n(n-1)\int_0^w t^{n-2}(1-t)dt$$

$$=n(n-1)\left[\int_0^w t^{n-2}dt-\int_0^w t^{n-1}dt\right]$$

$$=n(n-1)\left[\frac{w^{n-1}}{n-1}-\frac{w^n}{n}\right].$$

$$F_W(w) = n\,w^{n-1} - (n-1)w^n \quad , \quad 0 < w < 1,$$
$$= 0 \quad , \quad w \le 0,$$
$$= 1 \quad , \quad w \ge 1.$$

طريقة أخرى: يمكننا مباشرةً استخدام النتيجة التي توصلنا إليها سابقاً كالتالي:

$$F_W(w) = n\int_a^{b-w} f(x)\left[F(x+w) - F(x)\right]^{n-1} dx + \left[1 - F(b-w)\right]^n$$

$$a = 0 \quad , \quad b = 1$$

$$= n\int_0^{1-w} \left[x + w - x\right]^{n-1} dx + \left[1 - (1-w)\right]^n$$

$$= n\int_0^{1-w} w^{n-1} dx + w^n$$

$$= n\,w^{n-1}(1-w) + w.^n$$

$$\therefore F_W(w) = n\,w^{n-1} - (n-1)w^n \quad , \quad 0 \le w < 1,$$
$$= 0 \quad , \quad w < 0,$$
$$= 1 \quad , \quad w \ge 1.$$

مثال (٢-١-٢):

إذا كانت العينة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ مسحوبة من توزيع أسي له دالة الكثافة

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , \quad 0 < x < \infty, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد دالة كثافة الاحتمال للمدى $K_{1,n}(w)$ ودالة التوزيع $F_W(w)$.

الحل:

$$F_W(w) = n\int_a^{b-w} f(x)\left[F(x+w) - F(x)\right]^{n-1} dx + \left[1 - F(b-w)\right]^n$$

$$a = 0 \quad , \quad b = \infty$$

$$= n\int_0^{\infty} e^{-x}\left[e^{-x} - e^{-(x+w)}\right]^{n-1} dx$$

$$= n\left(1 - e^{-w}\right)^{n-1}\int_0^{\infty} e^{-nx} dx$$

$$= n\left(1 - e^{-w}\right)^{n-1} \left.\frac{e^{-nx}}{-n}\right|_0^{\infty}.$$

$$F_W(w) = \left(1-e^{-w}\right)^{n-1} \quad , \quad 0 < w < \infty,$$
$$= 0 \quad , \quad w \leq 0.$$

$$K_{1,n}(w) = \frac{d}{dw} F_W(w)$$

$$\therefore K_{1,n}(w) = (n-1)e^{-w}\left(1-e^{-w}\right)^{n-2} \quad , \quad 0 < w < \infty,$$
$$= 0 \quad , \quad e.w.$$

مثال (٢-١-٣):

سحبت عينة حجمها n من توزيع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a \leq x \leq b, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

وله دالة التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a < x < b, \\ 1 & , \quad x \geq b. \end{cases}$$

والمطلوب إيجاد دالة كثافة الاحتمال للمدى $K_{1,n}(w)$ ودالة التوزيع $F_W(w)$.

الحل:

بالاعتماد على النتيجة التي توصلنا لها سابقاً فإن:

$$F_W(w) = n \int_a^{b-w} f(x)\left[F(x+w)-F(x)\right]^{n-1} dx + \left[1-F(b-w)\right]^n$$

$$= n \int_a^{b-w} \frac{1}{b-a}\left(\frac{x+w-a}{b-a} - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1} dx + \left(1-\frac{b-w-a}{b-a}\right)^n$$

$$= n \int_a^{b-w} \frac{1}{b-a}\left(\frac{w}{b-a}\right)^{n-1} dx + \left(\frac{w}{b-a}\right)^n$$

$$= \frac{n}{b-a}\left(\frac{w}{b-a}\right)^{n-1}(b-w-a) + \left(\frac{w}{b-a}\right)^n$$

$$= n\left(\frac{w}{b-a}\right)^{n-1} - (n-1)\left(\frac{w}{b-a}\right)^n, \quad 0 < w < b-0.$$

$$= 0 \qquad w \leq 0$$

$$= 1 \qquad w \geq b - a.$$

ومنها يمكن حساب دالة الكثافة $K_{1,n}(w)$

$$K_{1,n}(w)=\frac{d}{dw}F_W(w)$$

$$\therefore K_{1,n}(w)=\frac{n(n-1)}{b-a}\left(\frac{w}{b-a}\right)^{n-2}-\frac{n(n-1)}{b-a}\left(\frac{w}{b-a}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{n(n-1)}{b-a}\left(\frac{w}{b-a}\right)^{n-2}\left(1-\frac{w}{b-a}\right) \quad , \quad 0<w<b-a,$$

$$=0 \quad , \quad e.w.$$

مثال (٢-١-٤):

بفرض إن X_1,X_2,X_3 تمثل عينة عشوائية من توزيع بيتا بمعلمتين $\alpha=2,\beta=1$ و $Y_1<Y_2<Y_3$ تمثل الإحصاءات الترتيبية. أوجد التوزيع الاحتمالي لمدى العينة $W=Y_3-Y_1$ ثم أحسب متوسطه وتباينه.

الحل:

نجد إن دالتي الكثافة والتوزيع للمتغير X هي:

$$f(x)=\begin{cases}2x & , \quad 0\le x\le 1,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 0,\\ x^2 & , \quad 0<x<1,\\ 1 & , \quad x\ge 1.\end{cases}$$

ومن العلاقة:

$$K_{1,n}(w)=n(n-1)\int_a^{b-w}\left[F(x+w)-F(x)\right]^{n-2}f(x)\ f(x+w)dx.$$

$$\therefore K_{1,3}(w)=3(3-1)\int_0^{1-w}\left[(x+w)^2-x^2\right](2x)[2(x+w])dx$$

$$=24\int_0^{1-w}x(x+w)\left[w^2+2wx\right]dx$$

$$=24w\int_0^{1-w}(2x^3+3wx^2+w^2x)dx$$

$$=12w(x^4+2wx^3+w^2x^2)\Big|_0^{1-w}$$

$$=12w((1-w)^4+2w(1-w)^3+w^2\left[(1-w)^2\right].$$

$$\therefore K_{1,3}(w) = 12w(1-w)^2 \quad , \quad 0 < w < 1,$$
$$= 0 \quad , \quad e.w.$$

أي أن W يتبع توزيع بيتا بمعالم $\alpha = 2, \beta = 3$ وبالتالي فإن متوسطه وتباينه هما على التوالى:

$$E(W) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{2}{5},$$

$$Var(W) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{1}{25}.$$

مثال (٢-١-٥):

برهن إن دالة كثافة الاحتمال لمدى عينة من 3 مشاهدات مسحوبة من التوزيع الطبيعي القياسي هي:

$$K_{1,3}(w) = \frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}w} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

الحل:

$$K_{1,3}(w) = 6\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, f(x+w)\big[F(x+w) - F(x)\big]dx$$

$$= 6\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x+w)^2}}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_x^{x+w} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} dt\right]dx$$

$$= \frac{6}{(2\pi)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+(x+w)^2)} \left[\int_x^{x+w} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt\right]dx.$$

ولكي نستطيع التبديل بين التكاملين نأخذ التعويض:

$$v = t - x \quad \Rightarrow \quad dv = dt \quad , \quad t = v + x$$

$$\therefore K_{1,3}(w) = \frac{6}{(2\pi)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+(x+w)^2)} \left[\int_0^{w} e^{-\frac{1}{2}(v+x)^2} dv\right]dx$$

$$= \frac{6}{(2\pi)\sqrt{2\pi}} \int_0^{w}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+(x+w)^2+(v+x)^2)} dx\, dv$$

$$= \frac{6}{(2\pi)\sqrt{2\pi}} \int_0^{w}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}Q} dx\, dv.$$

حيث:

$$Q = x^2 + (x+w)^2 + (v+x)^2 = 3x^2 + 2x(v+w) + v^2 + w^2.$$

نكمل المربع بالنسبة للمتغير x كالتالى:

$$Q=3\left(x+\frac{1}{3}(v+w)\right)^2-\frac{1}{3}(v+w)^2+v^2+w^2$$

$$=3\left(x+\frac{1}{3}(v+w)\right)^2+\frac{2}{3}v^2-\frac{2}{3}wv+\frac{2}{3}w^2.$$

ونحاول إكمال المربع للمقدار المتبقي بالنسبة للمتغير v كالتالى:

$$Q=3\left(x+\frac{1}{3}(v+w)\right)^2+\frac{2}{3}\left(v-\frac{1}{2}w\right)^2-\frac{1}{6}w^2+\frac{2}{3}w^2$$

$$=3\left(x+\frac{1}{3}(v+w)\right)^2+\frac{2}{3}\left(v-\frac{1}{2}w\right)^2+\frac{1}{2}w^2.$$

$$\therefore K_{1,3}(w)=\frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{(2\pi)\sqrt{2\pi}}\int_0^w e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\frac{1}{2}w}{\sqrt{3}/\sqrt{2}}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{1}{3}(v+w)}{1/\sqrt{3}}\right)^2}dx\,dv$$

$$=\frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{(2\pi)\sqrt{3}}\int_0^w e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\frac{1}{2}w}{\sqrt{3}/\sqrt{2}}\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{1}{3}(v+w)}{1/\sqrt{3}}\right)^2}dx\,dv$$

$$=\frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{(2\pi)\sqrt{3}}\int_0^w e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v-\frac{1}{2}w}{\sqrt{3}/\sqrt{2}}\right)^2}dv.$$

ولنأخذ التعويض:

$$z=\frac{v-\frac{1}{2}w}{\sqrt{3}/\sqrt{2}}\quad\Rightarrow\quad dz=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}dv$$

$$\therefore K_{1,3}(w)=\frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{(2\pi)\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{1}{\sqrt{6}}w}^{\frac{1}{\sqrt{6}}w} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$=\frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{(2\pi)}\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}w} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$=\frac{6e^{-\frac{1}{4}w^2}}{\pi\sqrt{2}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{6}}w} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz\qquad,\quad 0<w<\infty.$$

وهو المطلوب إثباته.

مثال (٢-١-٦):

المطلوب إيجاد دالة كثافة الاحتمال لمدى عينة حجمها n ($W = Y_n - Y_1$) ومسحوبة من توزيع طبيعي قياسي حيث:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

الحل:

$$F_W(w) = n\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[F(x+w) - F(x)]^{n-1}\,dx$$

$$= n\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\left[\int_{x}^{x+w} \phi(t)\,dt\right]^{n-1} dx$$

$$= n\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}w} \phi(x)\left[\int_{x}^{x+w} \phi(t)\,dt\right]^{n-1} dx + n\int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} \phi(x)\left[\int_{x}^{x+w} \phi(t)\,dt\right]^{n-1} dx$$

$$= I_1 + I_2$$

والآن في التكامل I_1 نأخذ التعويض:

$$u = -(x+w) \Rightarrow x = -(u+w) \quad , \quad dx = -du$$

$$I_1 = n\int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} \phi[-(u+w)]\left[\int_{-(u+w)}^{-u} \phi(t)\,dt\right]^{n-1} du$$

$$= n\int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} \phi(u+w)\left[\int_{u}^{u+w} \phi(t)\,dt\right]^{n-1} du$$

$$= n\int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} \phi(x+w)\left[\int_{x}^{x+w} \phi(t)\,dt\right]^{n-1} dx.$$

وبالتعويض في التكامل نحصل على:

$$F_W(w) = n\int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty} [\phi(x+w) + \phi(x)]\left[\int_{x}^{x+w} \phi(t)\,dt\right]^{n-1} dx.$$

أو يمكن كتابتها على الصورة:

$$F_W(w) = -n\int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty}[\phi(x+w)-\phi(x)]\left[\int_{x}^{x+w}\phi(t)\,dt\right]^{n-1}dx$$

$$+2n\int_{-\frac{1}{2}w}^{\infty}\phi(x+w)\left[\int_{x}^{x+w}\phi(t)\,dt\right]^{n-1}dx.$$

مثال (٢-١-٧):

أوجد توزيع المدى لعينة تتبع توزيع بدالتي كثافة وتوزيع كالتالي

$$f(x) = \operatorname{Exp}\left(-x-e^{-x}\right) \quad , \quad -\infty < x < \infty,$$

$$F(x) = \operatorname{Exp}\left(-e^{-x}\right) \quad , \quad -\infty < x < \infty.$$

الحل:

$$F(x+w) = \operatorname{Exp}\left(-e^{-(x+w)}\right)$$

$$= \left[\operatorname{Exp}\left(-e^{-x}\right)\right]^{e^{-w}}$$

$$= [F(x)]^{e^{-w}}$$

$$= [F(x)]^{v}.$$

حيث $v = e^{-w}$. ولإيجاد دالة التوزيع للمدى $W = Y_n - Y_1$ نستخدم الصيغة:

$$F_W(w) = n\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[F(x+w)-F(x)]^{n-1}dx$$

$$= n\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[(F(x))^{v}-F(x)\right]^{n-1}dx.$$

وبأخذ التعويض:

$$t = F(x) \quad \Rightarrow \quad dt = f(x)dx,$$

$$\therefore F_W(w) = n\int_{0}^{1}\left(t^{v}-t\right)^{n-1}dt$$

$$= n\int_{0}^{1} t^{n-1}\left(t^{v-1}-1\right)^{n-1}dt.$$

وباستخدام مفكوك ذى الحدين فإن:

$$F_W(W)=n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-1)^j\int_0^1 t^{n-1}\,t^{(n-j-1)(v-1)}\,dt$$

$$=n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-1)^j\int_0^1 t^{j+(n-j-1)v}\,dt$$

$$=n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-1)^j\left(j+1+(n-j-1)v\right)^{-1}$$

$$=n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}(-1)^{j-1}\left(j+(n-j)v\right)^{-1}$$

$$=n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}(-1)^{j-1}\left(j+e^{-w}(n-j)\right)^{-1}\quad,\quad -\infty<w<\infty.$$

ومنها يمكن إيجاد دالة الكثافة حيث:

$$K_{1,n}(w)=\frac{d}{dw}F_W(w)$$

$$=n\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}(-1)^{j-1}\left(j+(n-j)e^{-w}\right)^{-2}(n-j)e^{-w}$$

$$=n(n-1)\sum_{j=1}^{n}\binom{n-2}{j-1}(-1)^{j-1}e^{-w}\left(j+(n-j)e^{-w}\right)^{-2}.$$

مثال (٢-١-٨):

أوجد توزيع المدى لعينة تتبع توزيع له دالة كثافة احتمال:

$$f(x)=x\,e^{-x}\quad,\quad 0<x<\infty,$$
$$=0\quad,\quad e.w.$$

الحل:

$$F(x)=\int_0^x t\,e^{-t}\,dt.$$

بالتكامل بالتجزيء فإن:

$$\therefore F(x)=-t\,e^{-t}\Big|_0^x+\int_0^x e^{-t}dt$$

$$=\left[-t\,e^{-t}-e^{-t}\right]_0^x$$

$$=1-e^{-x}-x\,e^{-x}\quad,\quad x>0,$$
$$=0\quad,\quad e.w.$$

$$F(x+w)-F(x)=-e^{-(x+w)}-(x+w)e^{-(x+w)}+e^{-x}+xe^{-x}$$
$$=(1-e^{-w}-we^{-w})e^{-x}+(1-e^{-w})xe^{-x}$$
$$=ue^{-x}+uvxe^{-x}.$$

حيث:

$$u=(1-e^{-w}-we^{-w}),\ uv=(1-e^{-w})$$
$$\therefore F_W(w)=n\int_0^{\infty}f(x)[F(x+w)-F(x)]^{n-1}dx$$
$$=n\int_0^{\infty}xe^{-x}\left[ue^{-x}+uvxe^{-x}\right]^{n-1}dx$$
$$=nu^{n-1}\int_0^{\infty}xe^{-nx}(1+vx)^{n-1}dx$$
$$=nu^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}v^j\int_0^{\infty}x^{j+1}e^{-nx}dx$$
$$=u^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}v^j\frac{(j+1)!}{n^{j+1}}$$
$$F_W(w)=u^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\binom{n-1}{j-1}\frac{j!}{n^j}v^{j-1},\quad 0<w<\infty$$
$$=0 \qquad \text{e.w.}$$

مثال (٢-١-٩):

أوجد توزيع المدى لعينة تتبع توزيع له دالتي كثافة احتمال وتوزيع كما يلي:

$$f(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\quad,\quad F(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}\quad,\quad -\infty<x<\infty.$$

الحل:

$$F(x+w)=\frac{1}{1+e^{-(x+w)}}$$
$$=\frac{1}{1+ve^{-x}},$$

حيث $v=e^{-w}$.

$$\therefore F_W(w) = n\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[F(x+w)-F(x)]^{n-1}dx$$

$$= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-1)^j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[F(x)]^j[F(x+w)]^{n-j-1}dx$$

$$= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-1)^j\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]^j\left[\frac{1}{1+ve^{-x}}\right]^{n-j-1}dx.$$

وبالتعويض التالي:

$$u=\frac{1}{1+ve^{-x}} \Rightarrow \quad e^{-x}=\frac{1-u}{vu} \quad , \quad e^{-x}dx=\frac{1}{vu^2}du.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{vu}{1+(v-1)u}=\frac{vu}{1+cu},$$

حيث $c = v-1$.

$$\therefore F_W(w) = n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-1)^j v^{j+1}\int_0^1\frac{u^{n-1}}{(1+cu)^{j+2}}du$$

$$= n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-1)^j v^{j+1}A(j,n) \quad , 0<w<\infty.$$

حيث:

$$A(j,n)=\int_0^1\frac{u^{n-1}}{(1+cu)^{j+2}}du$$

$$=\frac{1}{(-c)^{n-1}}\int_0^1\frac{(-cu)^{n-1}}{(1+cu)^{j+2}}du$$

$$=\frac{1}{(-c)^{n-1}}\int_0^1\frac{(1-(1+cu))^{n-1}}{(1+cu)^{j+2}}du$$

$$=\frac{1}{(-c)^{n-1}}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-1)^i\int_0^1(1+cu)^{i-j-2}du.$$

و يمكن كتابة $A(j,n)$ على الصورة:

$$A(j,n)=\frac{-1}{(1-v)^n}\left[\binom{n-1}{j+1}(-1)^{j+1}\log v+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j+1}}^{n-1}\binom{n-1}{i}(-1)^i\frac{v^{i-j-1}}{i-j-1}\right].$$

(٢-٢) توزيع منتصف المدى:
Distribution of Mid-range

بفرض إن M هو منتصف المدى حيث $M=\dfrac{Y_1+Y_n}{2}$ ولغرض إيجاد التوزيع الاحتمالي لـــ M يتوجب أولاً إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـــ Y_1, Y_n وهي:

$$g_{1,n}(x,y)=n(n-1)f(x)\,f(y)[F(y)-F(x)]^{n-2},\quad a\le x<y\le b.$$

ولنأخذ التحويل:

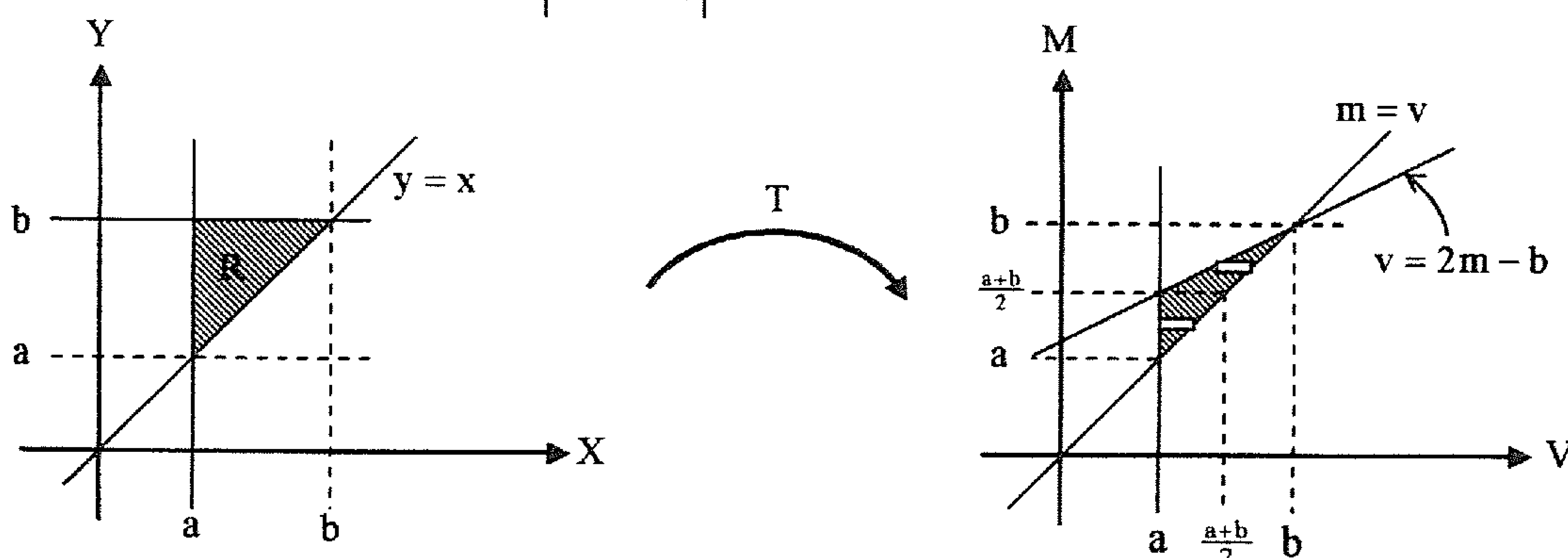
$$T:\quad m=\frac{x+y}{2}\quad,\quad v=x.$$

والتحويل العكسية هي:

$$T^{-1}:\quad x=v\quad,\quad y=2m-v$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل كالتالي:

$$J=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-2\quad\Rightarrow\quad |J|=2.$$



$$g(m,v)=2n(n-1)f(v)\,f(2m-v)[F(2m-v)-F(v)]^{n-2}$$
$$,\quad v<m<\tfrac{1}{2}(v+b)\quad,\quad a<v<b.$$

وبالتكامل يمكن حساب دالة الكثافة للمتغير M كالتالي:

$$g(m)=2n(n-1)\int_a^m f(v)\,f(2m-v)[F(2m-v)-F(v)]^{n-2}dv\quad,a<m<\tfrac{a+b}{2}$$

$$=2n(n-1)\int_{2m-b}^{m} f(v)\,f(2m-v)[F(2m-v)-F(v)]^{n-2}dv\,,\tfrac{a+b}{2}<m<b.$$

ولكن عندما $b\to\infty$ فإن

$$g(m)=2n(n-1)\int_a^m f(v)\,f(2m-v)[F(2m-v)-F(v)]^{n-2}dv,\quad a<m<\infty.$$

مثال (٢-٢-١):

إذا كان X_1, X_2, X_3 تمثل عينة عشوائية مسحوبة من توزيع بيتا بمعلمتين $\alpha = 2, \beta = 1$ وَ $Y_1 < Y_2 < Y_3$ تمثل الإحصاءات الترتيبية. أوجد التوزيع الاحتمالي لمنتصف المدى $M = \frac{Y_1 + Y_n}{2}$ ثم أحسب متوسطه وتباينه.

الحل:

نجد إن دالتي الكثافة والتوزيع للمتغير X هي على التوالى:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \le x \le 1, \\ 0 & , \quad e.w, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0, \\ x^2 & , \quad 0 < x < 1, \\ 1 & , \quad x \ge 1. \end{cases}$$

$$\therefore g_{1,3}(x,y) = 6(2x)(2y)\left(y^2 - x^2\right)$$
$$= 24xy\left(y^2 - x^2\right) \quad , \quad 0 \le x < y \le 1,$$
$$= 0 \quad , \quad e.w.$$

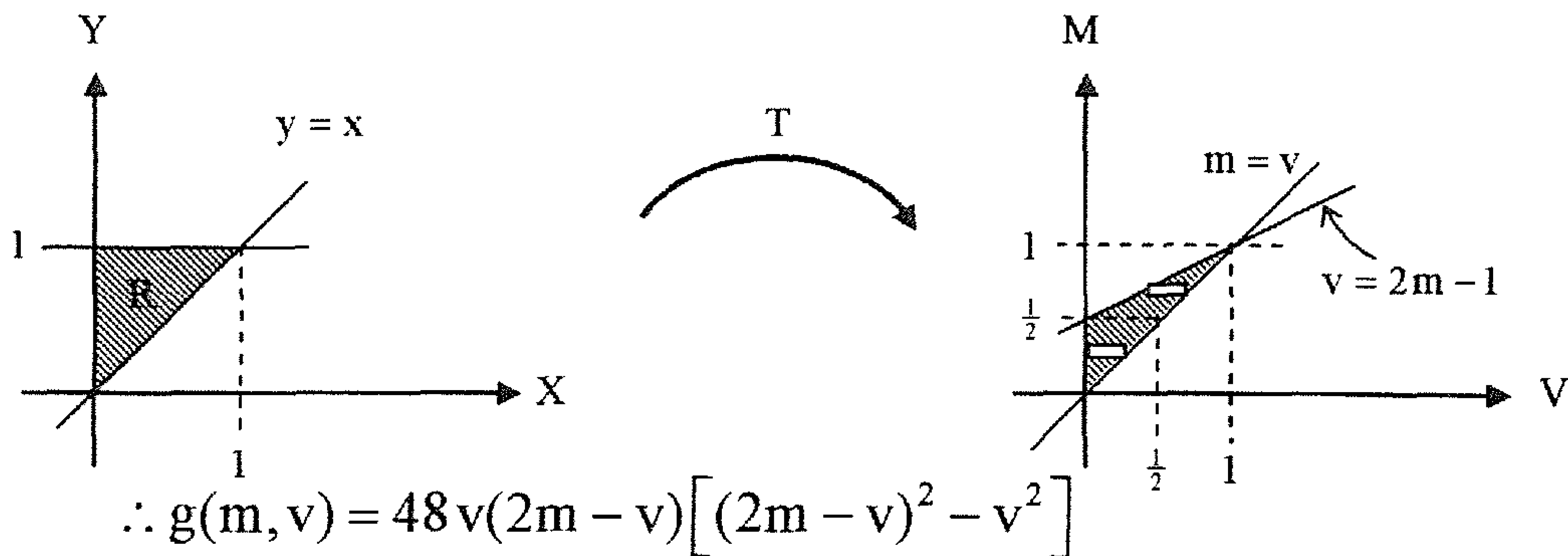
ولنأخذ التحويل:

$$T: \quad m = \frac{x+y}{2} \quad , \quad v = x,$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = v \quad , \quad y = 2m - v,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل $J = 2$.



$$\therefore g(m,v) = 48v(2m - v)\left[(2m - v)^2 - v^2\right]$$
$$, \quad v < m < \tfrac{1}{2}(v+1) \quad , \quad 0 < v < 1.$$

وبالتكامل يمكن حساب دالة الكثافة للمتغير M كالتالي:

$$h(m)=48\int_0^m v(2m-v)\left[(2m-v)^2-v^2\right]dv$$

$$=48m\int_0^m (4v^3-12mv^2+8m^2v)dv$$

$$=48m^5 \qquad , \quad 0<m<\tfrac{1}{2}.$$

$$h(m)=48\int_{2m-1}^{m} v(2m-v)\left[(2m-v)^2-v^2\right]dv$$

$$=48m\int_{2m-1}^{m} (4v^3-12mv^2+8m^2v)dv$$

$$=48m^5-48m(2m-1)^2 \quad , \quad \tfrac{1}{2}<m<1.$$

أي أن:

$$\therefore g(m)=48m^5 \qquad , \quad 0<m<\tfrac{1}{2}$$

$$=48m^5-48m(2m-1)^2 \ , \quad \tfrac{1}{2}<m<1.$$

ومنها يمكن حساب المتوسط والتباين كالتالي:

$$E(M)=\int_0^{\frac{1}{2}} 48m^6\,dm+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(48m^6-48m^2(2m-1)^2\right)dm$$

$$=\frac{23}{35},$$

$$E(M^2)=\int_0^{\frac{1}{2}} 48m^7\,dm+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(48m^7-48m^3(2m-1)^2\right)dm$$

$$=\frac{9}{20},$$

$$Var(M)=E(M^2)-\left[E(M)\right]^2=0.0181.$$

مثال (٢-٢-٢):

إذا كان $X_1,X_2,\cdots,X_n$ تمثل عينة عشوائية مسحوبة من توزيع منتظم في الفترة $(0,1)$ حيث:

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0\le x\le 1,\\ 0 & , \quad e.w.\end{cases}$$

أوجد توزيع منتصف المدى M.

الحل:

بأخذ التحويلة

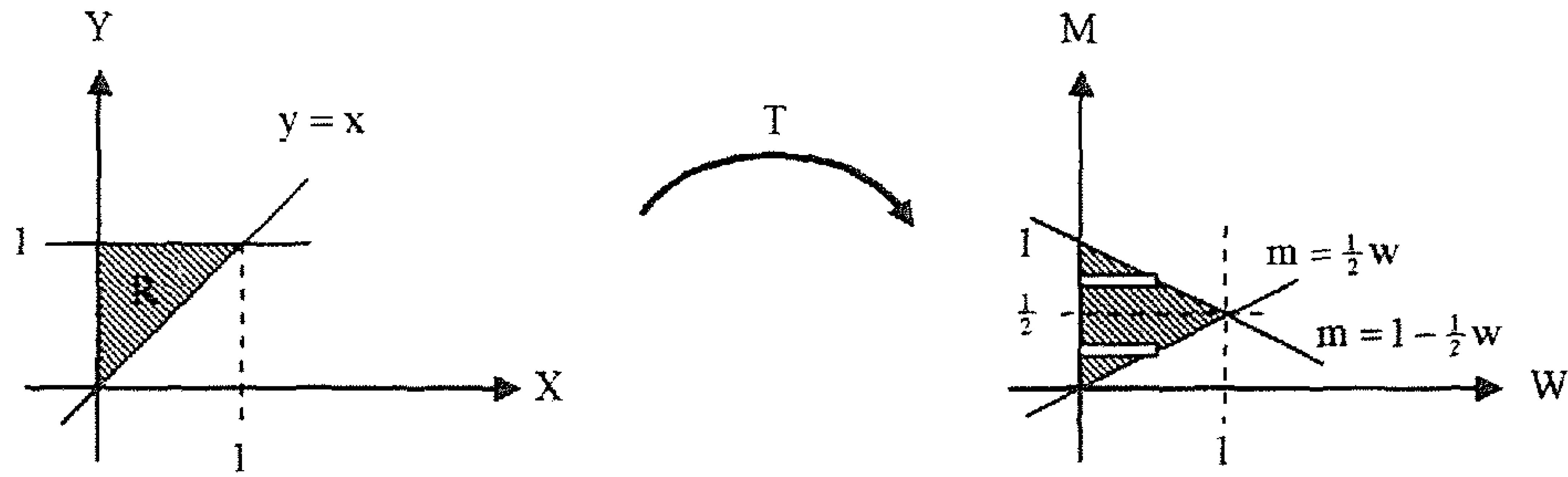
$$T: \quad m = \frac{x+y}{2} \quad , \quad w = y - x,$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = m - \tfrac{1}{2}w \quad , \quad y = m + \tfrac{1}{2}w,$$

فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين M, W هي:

$$\begin{aligned} g(m,w) &= n(n-1)\{F(m+\tfrac{1}{2}w) - F(m-\tfrac{1}{2}w)\}^{n-2} f(m-\tfrac{1}{2}w)f(m+\tfrac{1}{2}w) \\ &= n(n-1)w^{n-2} \quad , \tfrac{1}{2}w \le m \le 1-\tfrac{1}{2}w \, , 0 \le w \le 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \therefore g(m) &= n(n-1) \int_0^{2(1-m)} w^{n-2}\, dw \\ &= n(n-1) \left. \frac{w^{n-1}}{n-1} \right|_0^{2(1-m)} \\ &= n[2(1-m)]^{n-1} \quad , \quad 0 < m < \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(m) &= n(n-1) \int_0^{2m} w^{n-2}\, dw \\ &= n(n-1) \left. \frac{w^{n-1}}{n-1} \right|_0^{2m} \\ &= n[2m]^{n-1} \quad , \quad \tfrac{1}{2} < m < 1. \end{aligned}$$

أي أن:

$$\begin{aligned} \therefore g(m) &= n[2(1-m)]^{n-1} \quad , \quad 0 < m < \tfrac{1}{2} \\ &= n[2m]^{n-1} \quad , \quad \tfrac{1}{2} < m < 1. \end{aligned}$$

(٢-٣) توزيع المدى القياسي:
Distribution of Standardized Range

ليكن W مدى عينة مسحوبة من أي توزيع احتمالي معرف في الفترة $(-\infty,\infty)$ و V متغير عشوائي يتبع توزيع كاي-المربع بدرجات حرية m فإن :

$$S=\frac{W}{\sqrt{V/m}},$$

يسمى المدى القياسي. ولإيجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير S يتوجب أولاً إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ W و V ، وحيث إن V مستقل عن قياسات العينة فإن

$$g(w,v)=K_{1,n}(w)g(v) \quad , \quad -\infty<w<\infty \quad , \quad 0<v<\infty .$$

ولنأخذ التحويل:

$$T: \quad s=\frac{w}{\sqrt{u}} \quad , \quad u=\frac{v}{m},$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad w=s\sqrt{u} \quad , \quad v=mu,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل:

$$J=\begin{vmatrix} \sqrt{u} & \frac{s}{2\sqrt{u}} \\ 0 & m \end{vmatrix}=m\sqrt{u},$$

وعندها فإن دالة الكثافة المشتركة لـ U,S هي:

$$f_1(s,u)=m\sqrt{u}\,K_{1,n}(s\sqrt{u})g(mu) \quad , \quad 0<s,u<\infty$$

ومنها يمكن حساب دالة كثافة الاحتمال لـ S كالتالي:

$$h(s)=m\int_0^{\infty}\sqrt{u}\,K_{1,n}(s\sqrt{u})g(mu)du \quad , \quad 0<s<\infty .$$

مثال (٢-٣-١):

إذا كانت $X\sim N(0,1)$ وكانت $\phi(x)$ دالة الكثافة الاحتماليه للمتغير X بينما $\Phi(x)$ دالة التوزيع التجميعي فإن:

$$K_{1,n}(w)=n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi(x+w)-\Phi(x)\right]^{n-2}\phi(x)\,\phi(x+w)dx .$$

ومنها نحصل على:

$$h(s)=m\int_0^\infty \sqrt{u}\,K_{1,n}(s\sqrt{u})\,g(mu)\,du \quad , \quad 0<s<\infty .$$

والدالة $h(s)$ بصيغتها المعتمدة على $N(0,1)$ شائعة الاستخدام في بعض التطبيقات النظرية الإحصائية وخصوصاً في موضوع اختبارات الفروض وفترات الثقة. وفي هذه الحالة يقال أن المتغير S يتبع توزيع المدى القياسي بدرجة حرية m,n وبدالة كثافة احتمال $h(s)$. وقد تم عمل جداول خاصة لهذا التوزيع تبين قيم S عند مستوى معنوية α ودرجتي حرية m,n . فإذا كانت $S_{n,m}(\alpha)$ تمثل قيمة المدى القياسي عند درجة حرية m,n ومستوى معنوية α فإن هذه القيمة تحقق المعادلة التكاملية التالية:

$$\int_{S_{n,m}(\alpha)}^{\infty} h(s)\,ds=\alpha=P\left[S>S_{n,m}(\alpha)\right],$$

أو إن $P\left[S<S_{n,m}(\alpha)\right]=1-\alpha$ ، ويمكن إيجاده من الجدول في ملحق (٣) فمثلاً قيمة $S_{10,5}$, $\alpha=.05$ هي 6.99 أي أن:

$$P\left[S<S_{10,5}(.05)\right]=.95,$$

أو ان:

$$P\left(S_{10,5}(.05)>6.99\right)=.05.$$

ويلاحظ من جداول هذا التوزيع إن $n\geq 2$ ، لأن المدى W يتطلب وجود عينة عشوائية عدد مشاهداتها لا يقل عن 2 .

مثال (٢-٣-٢):

بفرض أن X_1,X_2 عينة عشوائية من $N(0,1)$ وإن $Y_1<Y_2$ تمثل الإحصاءات الترتيبية للعينة وليكن $V\sim\chi^2_{(1)}$ ، أوجد التوزيع الاحتمالي للمدى القياسي S .

الحل:

نجد إن:

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad , \quad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

وأن:

$$g(v)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}v^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}v} \quad , v>0.$$

وبالتالي فإن:

$$K_{1,n}(w)=n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi(x+w)-\Phi(x)\right]^{n-2}\phi(x)\ \phi(x+w)dx.$$

وعندما $n=2$ فإن:

$$K_{1,2}(w)=2\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x)\ \phi(x+w)dx$$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x+w)^2}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}w^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(2x^2+2xw)}dx.$$

نحاول إكمال المربع بالنسبة للمتغير x فحصل على:

$$K_{1,2}(w)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}w^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(2(x+\frac{1}{2}w)^2-\frac{1}{2}w^2)}dx$$

$$=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{4}w^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{1}{2}w}{1/\sqrt{2}}\right)^2}dx.$$

وإذا افترضنا التحويلة التالية:

$$y=\sqrt{2}\left(x+\frac{w}{2}\right)$$

فإن: $dy=\sqrt{2}dx$ أو ان:

$$dx=\frac{1}{\sqrt{2}}dy,$$

وعليه فإن:

$$K_{1,2}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad e^{-\frac{w^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy$$

والتكامل فى الصيغة الأخيرة مساو إلى $\sqrt{2\pi}$. وعلى ذلك:

$$K_{1,2}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad e^{-\frac{w^2}{4}}.\ \sqrt{2\pi}.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{4}w^2}\quad,\qquad -\infty<w<\infty.$$

ومنه فإن دالة الكثافة للمتغير S هي:

$$h(s)=\int_{0}^{\infty}\sqrt{u}\,K_{1,2}(s\sqrt{u})g(u)du.$$

حيث $m = 1$ فإن:

$$h(s) = \int_0^\infty \sqrt{u}\,\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4}(s^2 u)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}u}\, du$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^\infty e^{-(\frac{1}{4}s^2+\frac{1}{2})u}\, du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_0^\infty e^{-\lambda u}\, du, \quad \lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}s^2$$

$$= \frac{-1}{\lambda\sqrt{2}\pi}\left[\bar{e}^{\lambda u}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda\sqrt{2}\pi}$$

$$\therefore h(s) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{(\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2})}$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{(\frac{1}{2}s^2 + 1)} \quad , \quad s > 0.$$

وللتأكد من إن الدالة $h(s)$ دالة كثافة احتمال يكفي أن نحسب التكامل:

$$\int_0^\infty h(s)\, ds = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{(\frac{1}{2}s^2 + 1)} ds\,.$$

وبأخذ التعويض:

$$y = \frac{s}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{ds}{\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \int_0^\infty h(s)\, ds = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}\, dy}{(y^2+1)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy}{(y^2+1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dy}{(y^2+1)} = 1\,.$$

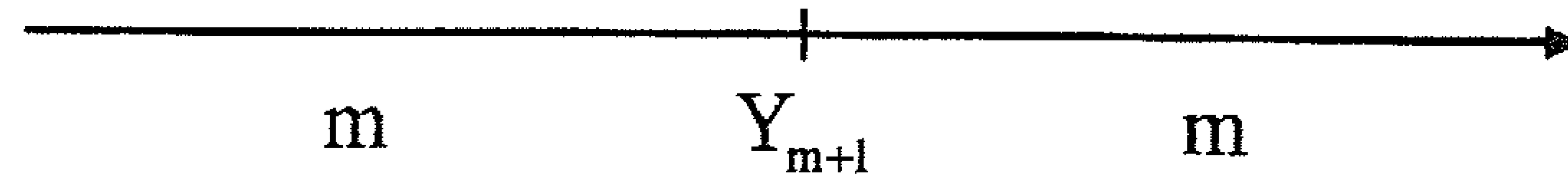
نلاحظ أن التكامل الاخير يمثل تكامل داله كثافة احتمال كوشي المعيارى. اي أن Y يتبع كوشي بمعلمه $(0\,,\,1)$.

(٢-٤) توزيع الوسيط:
Distribution of The Median

يعرف الوسيط على أنه القيمة التي تقسم مجموعة من البيانات إلى قسمين متساويين بحيث يكون عدد المفردات التي أقل منها يساوي عدد المفردات التي أكبر منها مع مراعاة أن البيانات مرتبة ترتيب تصاعدياً أو تنازلياً. ويمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال للوسيط في حالتين:

١- عندما تكون عدد المفردات للعينة فردية:

بفرض إن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع له دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ودالة التوزيع $F(x)$ وكانت n فردية. فإن الوسيط هو الإحصاء الترتيبي ذو الرتبة $\frac{n+1}{2}$ ولإيجاد دالة كثافة الاحتمال لـ $Y_{\frac{n+1}{2}}$ نفرض أن حجم العينة $n = 2m+1$ وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي $Y_{\frac{n+1}{2}} = Y_{m+1}$ هي:



$$g_{m+1}(x) = \frac{(2m+1)!}{(m!)^2} f(x) [F(x)]^m [1 - F(x)]^m \quad , \quad a \le x \le b.$$

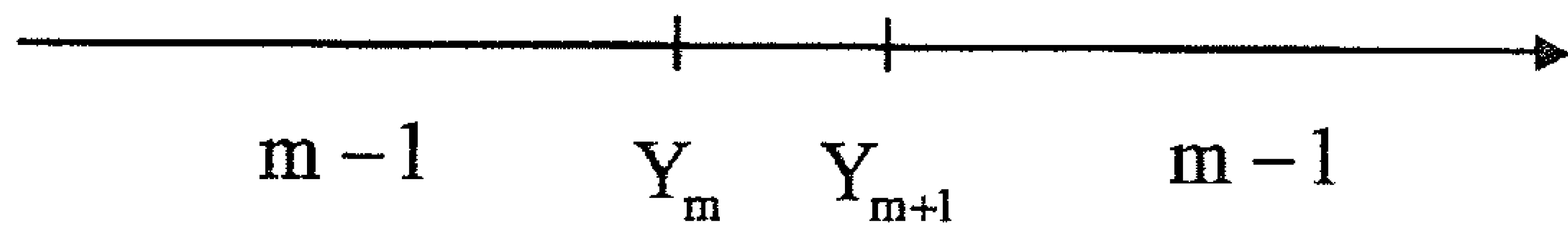
أنظر المثال (١-٢-٧).

٢- عندما تكون عدد المفردات للعينة زوجية ونرغب في الحصول على قيمة وحيدة لوسيط العينة U.

التعريف المعروف هو:

$$U = \frac{Y_{\frac{n}{2}} + Y_{\frac{n+2}{2}}}{2}.$$

وعلى ذلك توزيع U لابد أن يشتق من دالة الكثافة المشتركة لـ $Y_{\frac{n}{2}}, Y_{\frac{n+2}{2}}$. وبوضع $n = 2m$ فإن:



$$\therefore g_{m,m+1}(x,y) = \frac{(2m)!}{[(m-1)!]^2} f(x) f(y) [F(x)]^{m-1} [1 - F(y)]^{m-1} \quad , a \le x < y \le b.$$

ولنأخذ التحويل:

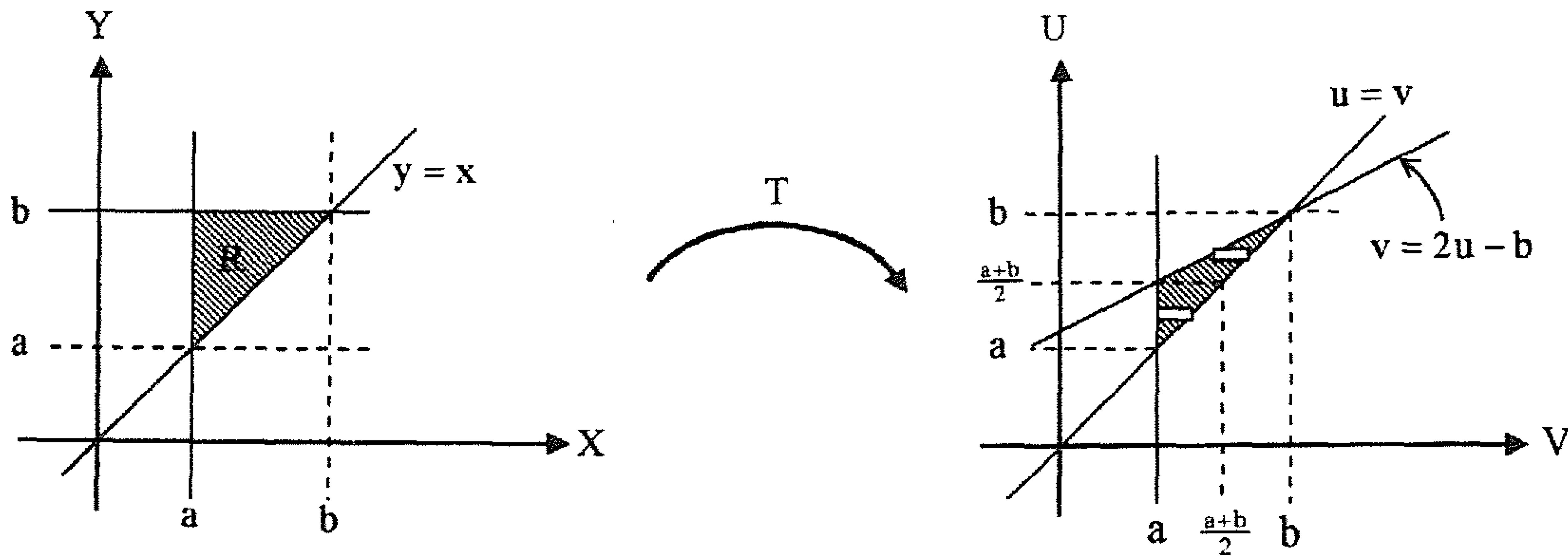
$$T: \quad u = \frac{x+y}{2} \quad , \quad v = x ,$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = v \quad , \quad y = 2u - v ,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad \Rightarrow \quad |J| = 2.$$



$$\therefore f_1(u,v) = 2\frac{(2m)!}{((m-1)!)^2} f(v)f(2u-v)[F(v)]^{m-1}[1-F(2u-v)]^{m-1}$$

$$,\quad v < u < \tfrac{1}{2}(v+b) \quad , \quad a < v < b.$$

وبالتكامل يمكن حساب دالة الكثافة للمتغير U ، (لاحظ إنه لكي نكامل بالنسبة للمتغير v نأخذ شريحة التكامل أفقية، عندها نجد إن حدود التكامل تختلف على فترتين)

$$f_U(u) = 2\frac{(2m)!}{((m-1)!)^2}\int_a^u f(v)f(2u-v)[F(v)]^{m-1}[1-F(2u-v)]^{m-1}\,dv$$

$$,a < u < \tfrac{a+b}{2}$$

$$= 2\frac{(2m)!}{((m-1)!)^2}\int_{2u-b}^{u} f(v)f(2u-v)[F(v)]^{m-1}[1-F(2u-v)]^{m-1}\,dv$$

$$,\tfrac{a+b}{2} < u < b$$

ولكن عندما $b = \infty$ فإن:

$$f_U(u) = 2\frac{(2m)!}{((m-1)!)^2}\int_a^u f(v)f(2u-v)[F(v)]^{m-1}[1-F(2u-v)]^{m-1}\,dv$$

$$,a < u < \infty.$$

مثال (٢-٤-١):

إذا كانت العينة مسحوبة من توزيع منتظم في الفترة $(0,1)$ وعدد المشاهدات زوجي $n = 2m$.

أوجد دالة كثافة الاحتمال للوسيط $U = \dfrac{Y_m + Y_{m+1}}{2}$.

الحل:

نجد إن دالتي الكثافة والتوزيع للمتغير X هي:

$$f(x)=\begin{cases}1 & , \quad 0\le x\le 1,\\ 0 & , \quad e.w,\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & , \quad x\le 0,\\ x & , \quad 0<x<1,\\ 1 & , \quad x\ge 1.\end{cases}$$

$$\therefore g_{m,m+1}(x,y)=\frac{(2m)!}{\left((m-1)!\right)^2}x^{m-1}(1-y)^{m-1} \quad ,0\le x<y\le 1.$$

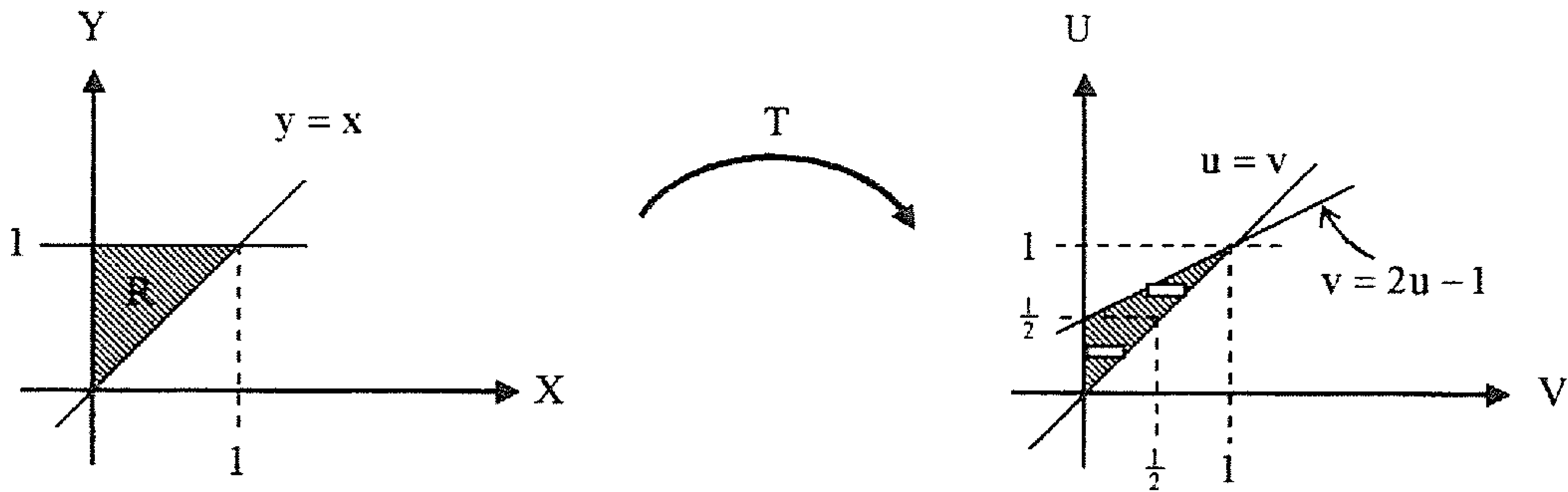
ولنأخذ التحويل:

$$T: \quad u=\frac{x+y}{2} \quad , \quad v=x,$$

والتحويل العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x=v \quad , \quad y=2u-v,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل $J=2$.



$$\therefore f_1(u,v)=2\frac{(2m)!}{\left((m-1)!\right)^2}v^{m-1}(1-2u+v)^{m-1}$$
$$, \quad v<u<\tfrac{1}{2}(v+1) \quad , \quad 0<v<1.$$

وبالتكامل يمكن حساب دالة الكثافة للمتغير U كالتالي:

$$f_U(u)=2\frac{(2m)!}{\left((m-1)!\right)^2}\int_0^u v^{m-1}(1-2u+v)^{m-1}dv \quad , \quad 0<u<\tfrac{1}{2}$$
$$=2\frac{(2m)!}{\left((m-1)!\right)^2}\int_{2u-1}^{u} v^{m-1}(1-2u+v)^{m-1}dv \quad , \quad \tfrac{1}{2}<u<1.$$

وكحالة خاصة عندما $m=2$ فإن:

$$f_U(u) = 48\int_0^u v(1-2u+v)dv$$

$$= 48\int_0^u ((1-2u)v+v^2)dv$$

$$= 8u^2(3-4u) \quad , \quad 0<u<\tfrac{1}{2},$$

$$f_U(u) = 48\int_{2u-1}^u v(1-2u+v)dv$$

$$= 48\int_{2u-1}^u ((1-2u)v+v^2)dv$$

$$= 8(4u^3-9u^2+6u-1) \quad , \quad \tfrac{1}{2}<u<1,$$

أي أن :

$$f_U(u) = 8u^2(3-4u) \quad , \quad 0<u<\tfrac{1}{2}$$
$$= 8(4u^3-9u^2+6u-1) \quad , \quad \tfrac{1}{2}<u<1.$$

(٢-٥) توزيع الفرق بين إحصاءين متتاليين:

إذا كان لدينا عينة عشوائية مسحوبة من توزيع بحيث إن $b \to \infty$ وعرفنا المتغير $W = Y_{r+1} - Y_r$ (الفرق بين ترتيبين متتاليين) فإن دالة كثافته الاحتمالية تعتمد على التوزيع المشترك للمتغيرين Y_{r+1}, Y_r هي:

$$\underset{r-1}{\longrightarrow} \; Y_r \; Y_{r+1} \; \underset{n-r-1}{\longrightarrow}$$

$$g_{r,r+1}(x,y) = C\,f(x)\,f(y)[F(x)]^{r-1}[1-F(y)]^{n-r-1}$$
$$, \quad a \le x < y \le \infty,$$

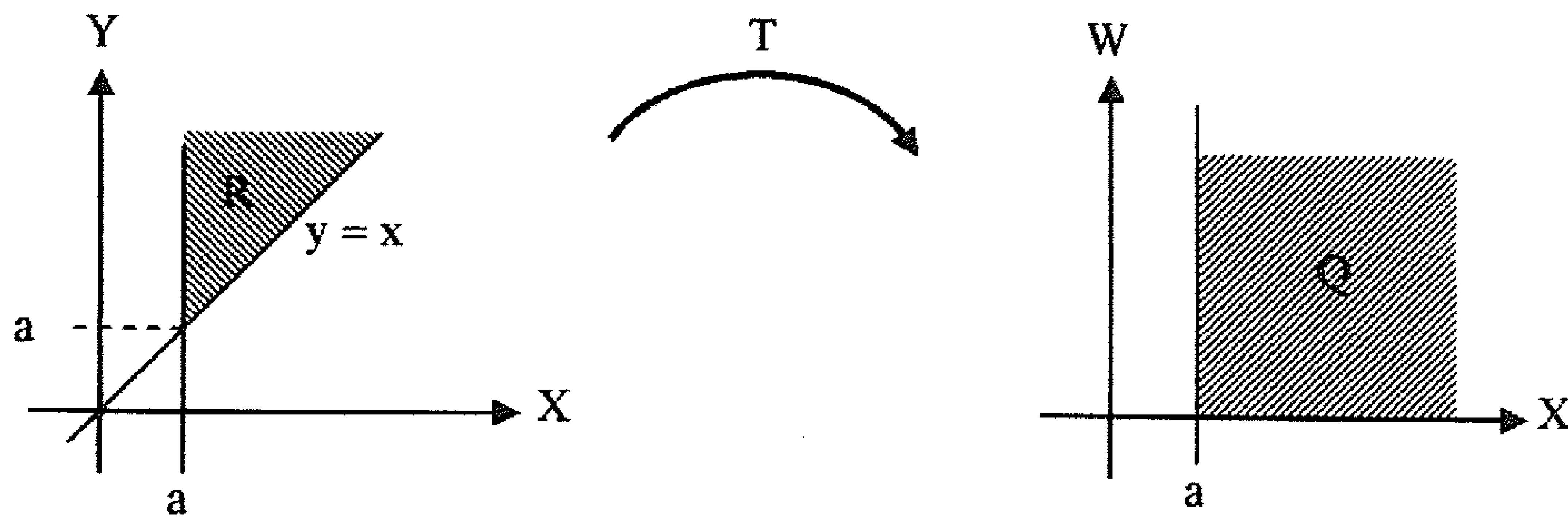
حيث $C = \dfrac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}$، ولنأخذ التحويل:

$$T: \quad w = y - x \quad , \quad z = x$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = z \quad , \quad y = z + w$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل $J = 1$.



$$\therefore h(w,z) = Cf(z)\, f(w+z)[F(z)]^{r-1}[1-F(w+z)]^{n-r-1}$$

$$, \quad a \le w, z \le \infty.$$

ومنها يمكن حساب دالة الكثافة للمتغير W كالتالي:

$$f_W(w) = C\int_a^{\infty} f(z)\, f(w+z)[F(z)]^{r-1}[1-F(w+z)]^{n-r-1} dz \quad , \quad a \le w \le \infty.$$

ودالة التوزيع له هي:

$$F_W(w) = C\int_a^{w}\int_a^{\infty} f(z)\, f(w'+z)[F(z)]^{r-1}[1-F(w'+z)]^{n-r-1} dz\, dw'$$

$$= C\int_a^{\infty} f(z)[F(z)]^{r-1}\int_a^{w} f(w'+z)\,[1-F(w'+z)]^{n-r-1} dw' dz$$

$$= C\int_a^{\infty} f(z)[F(z)]^{r-1} \left. \frac{-[1-F(w'+z)]^{n-r}}{n-r} \right|_a^{w} dz$$

$$= \frac{C}{n-r}\int_a^{\infty} f(z)[F(z)]^{r-1}\left\{[1-F(z)]^{n-r} - [1-F(w+z)]^{n-r}\right\} dz.$$

$$, \quad a \le w \le \infty.$$

مثال (٢-٥-١):

أوجد توزيع المدى $W = Y_{r+1} - Y_r$ لعينة تتبع التوزيع الأسي بدالة كثافة احتمال:

$$f(x) = e^{-x} \quad , \quad 0 < x < \infty,$$
$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

الحل:

باستخدام النتيجة السابقة فإن:

$$F_W(w) = \frac{C}{n-r}\int_0^{\infty} e^{-z}\left(1-e^{-z}\right)^{r-1}\left[\left(e^{-z}\right)^{n-r} - \left(e^{-(w+z)}\right)^{n-r}\right] dz$$

$$= \frac{C}{n-r}\left(1-e^{-(n-r)w}\right)\int_0^\infty e^{-(n-r+1)z}\left(1-e^{-z}\right)^{r-1}dz.$$

وبأخذ التعويض:

$$y = e^{-z} \quad \Rightarrow \quad dy = -e^{-z}dz,$$

$$\therefore F_W(w) = \frac{C}{n-r}\left(1-e^{-(n-r)w}\right)\int_0^1 y^{n-r}(1-y)^{r-1}dz$$

$$= \frac{C}{n-r}\left(1-e^{-(n-r)w}\right)B(n-r+1,r)$$

$$= \frac{1}{n-r}\frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}\frac{(r-1)!(n-r)!}{n!}\left(1-e^{-(n-r)w}\right)$$

$$= 1-e^{-(n-r)w} \qquad , \quad 0 \le w \le \infty.$$

ومنه فإن دالة الكثافة الاحتماليه هي:

$$f_W(w) = \frac{d}{dw}F_W(w) = (n-r)e^{-(n-r)w} \qquad , \quad 0 \le w \le \infty.$$

أي أن $W = Y_{r+1} - Y_r$ يتبع التوزيع الأسي بمعلمة $\lambda = n - r$.

مثال (٢-٥-٢):

وكحالة خاصة عندما $r = 1$ فإن $W = Y_2 - Y_1$ ودالة الكثافة الاحتماليه له هي:

$$F_W(w) = n\int_a^\infty f(z)\left\{[1-F(z)]^{n-1} - [1-F(w+z)]^{n-1}\right\}dz, \quad a \le w < \infty.$$

وعندما $r = n - 1$ فإن $W = Y_n - Y_{n-1}$ ودالة الكثافة الاحتماليه له هي:

$$F_W(w) = n(n-1)\int_a^\infty f(z)[F(z)]^{n-2}\{F(w+z) - F(z)\}dz, \quad a \le w < \infty$$

مثال (٢-٥-٣):

أوجد توزيع المدى $W = Y_{r+1} - Y_r$ لعينة تتبع التوزيع الطبيعي القياسي $N(0,1)$:

الحل:

$$f_W(w) = C\int_{-\infty}^\infty \phi(z)\,\phi(w+z)[\Phi(z)]^{r-1}[1-\Phi(w+z)]^{n-r-1}dz$$

$$= \frac{C}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}(w+z)^2}[\Phi(z)]^{r-1}[1-\Phi(w+z)]^{n-r-1}dz.$$

وبأخذ التعويض:

$$x' = z + \tfrac{1}{2}w \quad , \quad dx' = dz.$$

$$\therefore f_W(w) = \frac{C}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}w^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x'^2} \left[\Phi(x' - \tfrac{1}{2}w)\right]^{r-1} \left[1 - \Phi(x' + \tfrac{1}{2}w)\right]^{n-r-1} dz$$

(٢-٦) توزيع النسبة بين إحصاءين متتاليين:

لايجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي $Z = \frac{Y_r}{Y_{r+1}}$ حيث إن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ Y_{r+1}, Y_r هي:

$$g_{r,r+1}(x,y) = C f(x)\, f(y) \left[F(x)\right]^{r-1} \left[1 - F(y)\right]^{n-r-1}$$

$$, \quad a \le x < y \le b.$$

حيث : $C = \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}$ ، ولنأخذ التحويل:

$$T: \quad z = \frac{x}{y} \quad , \quad w = y,$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x = zw \quad , \quad y = w,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل:

$$J = \begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = w.$$

$$\therefore h(z,w) = C w f(zw)\, f(w) \left[F(zw)\right]^{r-1} \left[1 - F(w)\right]^{n-r-1},$$

ومنها يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z كالتالي:

$$f_Z(z) = C \int_{-\infty}^{\infty} w f(zw)\, f(w) \left[F(zw)\right]^{r-1} \left[1 - F(w)\right]^{n-r-1} dw.$$

مثال (٢-٦-١):

إذا كانت العينة مسحوبة من توزيع منتظم في الفترة $(0,1)$ أوجد توزيع النسبة بين إحصاءين متتالين.

الحل:

لنأخذ التحويل:

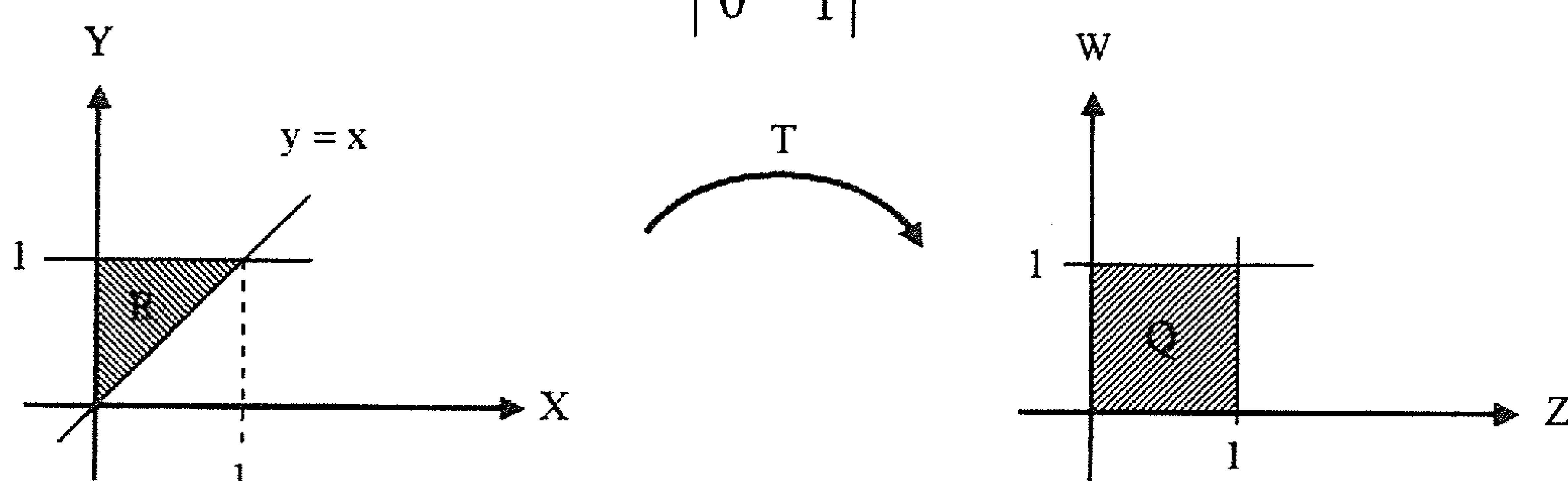
$$T: \quad z=\frac{x}{y} \quad , \quad w=y,$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}: \quad x=zw \quad , \quad y=w,$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل:

$$J=\begin{vmatrix} w & z \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=w\,.$$



فإن:

$$g_{r,r+1}(x,y)=Cx^{r-1}(1-y)^{n-r-1} \quad , \quad 0\le x<y\le 1,$$

$$h(z,w)=Cw(zw)^{r-1}(1-w)^{n-r-1} \quad , \quad 0<z<1 \quad , \quad 0<w<1.$$

$$\begin{aligned}\therefore f_Z(z) &= Cz^{r-1}\int_0^1 w^r(1-w)^{n-r-1}dw \\ &= Cz^{r-1}B(r+1,n-r) \\ &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}\,\frac{r!(n-r-1)!}{n!}z^{r-1} \\ &= rz^{r-1} \qquad , \quad 0<z<1.\end{aligned}$$

مثال (٢-٦-٢):

إذا كانت العينة مسحوبة من توزيع أسي بدالة كثافة احتمال $f(x)=e^{-x}$ أوجد توزيع النسبة بين إحصاءين متتاليين $Z=\frac{Y_r}{Y_{r+1}}$.

الحل:

باستخدام النتيجة السابقة فإن:

$$f_Z(z)=C\int_0^\infty w f(zw)\ f(w)[F(zw)]^{r-1}[1-F(w)]^{n-r-1}dw$$

$$=C\int_0^\infty w e^{-wz}\ e^{-w}\left[1-e^{-wz}\right]^{r-1}\left[e^{-w}\right]^{n-r-1}dw$$

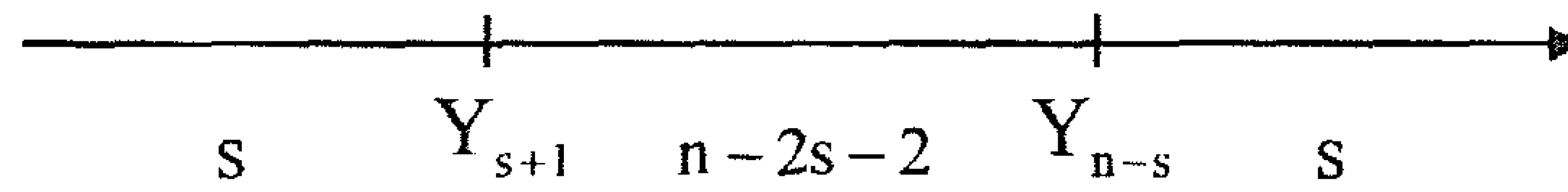
$$=C\int_0^\infty w e^{-(n-r+z)w}\left[1-e^{-zw}\right]^{r-1}dw$$

$$=C\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}(-1)^j\int_0^\infty w e^{-[n-r+(j+1)z]w}dw$$

$$=C\sum_{j=0}^{r-1}\binom{r-1}{j}(-1)^j\frac{1}{[n-r+(j+1)z]^2}\quad,\quad 0<z<1.$$

(٢-٧) توزيع المدى المئيني:
The Quasi Range Distribution

يقصد بالمدى المئيني الفرق بين الإحصاءين Y_{n-s} , Y_{s+1} حيث Y_{s+1} يسبقها s من المشاهدات و Y_{n-s} يليها s من المشاهدات.أي أن $W=Y_{n-s}-Y_{s+1}$



$$\therefore g_{s+1,n-s}(x,y)=Cf(x)\ f(y)[F(x)]^s[F(y)-F(x)]^{n-2s-2}[1-F(y)]^s$$
$$,\quad a\le x<y\le b.$$

حيث $C=\dfrac{n!}{(s!)^2(n-2s-2)!}$، ولنأخذ التحويل:

$$T:\quad w=y-x\quad,\quad z=x,$$

والتحويلة العكسية هي:

$$T^{-1}:\quad x=z\quad,\quad y=z+w.$$

ومنها يمكن حساب جاكوبيان التحويل $J=1$ (أرجع لرسم مجال المدى في بداية الباب) .

$$\therefore f_{Z,W}(z,w)=Cf(z)\ f(z+w)[F(z)]^s[F(z+w)-F(z)]^{n-2s-2}[1-F(z+w)]^s$$
$$,\quad a\le z,w,z+w\le b.$$

ومنها يمكن حساب دالة الكثافة لـــ W كالآتي:

$$f_W(w) = C\int_a^{b-w} f(z)\, f(z+w)\left[F(z)\right]^s\left[F(z+w)-F(z)\right]^{n-2s-2}\left[1-F(z+w)\right]^s dz$$

$$,\quad a \le w \le b-a.$$

مثال (٢-٧-١):

إذا كانت العينة مسحوبة من توزيع أسي بدالة كثافة احتمال $f(x)=e^{-x}$ أوجد توزيع المدى المئيني $W = Y_{n-s} - Y_{s+1}$.

الحل:

باستخدام النتيجة السابقة فإن:

$$f_{Z,W}(z,w) = Ce^{-(n-s)z}\left(1-e^{-z}\right)^s e^{-(s+1)w}\left(1-e^{-w}\right)^{n-2s-2}$$

$$,\quad 0 \le z, w \le \infty.$$

$$\therefore f_W(w) = Ce^{-(s+1)w}\left(1-e^{-w}\right)^{n-2s-2}\int_0^{\infty} e^{-(n-s)z}\left(1-e^{-z}\right)^s dz.$$

وبالتعويض:

$$y = e^{-z} \quad \Rightarrow \quad dy = -e^{-z}dz.$$

$$\therefore f_W(w) = Ce^{-(s+1)w}\left(1-e^{-w}\right)^{n-2s-2}\int_0^{\infty} y^{n-s-1}(1-y)^s dz$$

$$= Ce^{-(s+1)w}\left(1-e^{-w}\right)^{n-2s-2} B(n-s, s+1)$$

$$= \frac{n!}{(s!)^2(n-2s-2)!}\,\frac{s!\,(n-s-1)!}{n!} e^{-(s+1)w}\left(1-e^{-w}\right)^{n-2s-2}$$

$$= \frac{(n-s-1)!}{s!(n-2s-2)!}\, e^{-(s+1)w}\left(1-e^{-w}\right)^{n-2s-2} \qquad ,\quad 0 \le w \le \infty.$$

لاحظ أنه يجب أن يكون $n \ge 2s+2$ وعندما $s=1$ فهذا يعني إننا نهمل الوحدة الأولى والوحدة الأخيرة أما عندما نضع $s=0$ فإننا نحصل على المدى. ويمكن إيجاد دالة التوزيع كالتالي:

$$F_W(x') = \frac{(n-s-1)!}{s!(n-2s-2)!}\int_0^{x'} e^{-(s+1)w}\left(1-e^{-w}\right)^{n-2s-2} dw.$$

وبالتعويض:

$$t = e^{-w} \quad \Rightarrow \quad dt = -e^{-w}dw.$$

$$\therefore F_W(x') = \frac{(n-s-1)!}{s!(n-2s-2)!} \int_{e^{-x'}}^{1} t^s (1-t)^{n-2s-2}\, dw$$

$$= 1 - I_{e^{-x'}}(s+1, n-2s-1).$$

حيث $I_x(p,q)$ دالة بيتا الناقصة. ويمكن كذلك إيجاد الدالة المميزة لـ W وهي:

$$\phi_W(it) = E\left(e^{itW}\right)$$

$$= \frac{(n-s-1)!}{s!(n-2s-2)!} \int_0^{\infty} e^{-(s+1-it)w} \left(1-e^{-w}\right)^{n-2s-2} dw.$$

وبأخذ التعويض:

$$t = e^{-w} \quad \Rightarrow \quad dt = -e^{-w} dw.$$

$$\therefore \phi_W(it) = \frac{(n-s-1)!}{s!(n-2s-2)!} \int_0^{\infty} t^{s-it} (1-t)^{n-2s-2}\, dw$$

$$= \frac{\Gamma(n-s)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n-2s-1)} \frac{\Gamma(s-it+1)\Gamma(n-2s-1)}{\Gamma(n-s-it)}$$

$$= \frac{\Gamma(n-s)\Gamma(s-it+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n-s-it)}.$$

أما الدالة المولدة للعزوم فيكفي وضع t بدلاً من it فنحصل على:

$$M_W(t) = \frac{\Gamma(n-s)\Gamma(s-t+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(n-s-t)} = \prod_{j=s+1}^{n-s-1} \left(1 - \frac{t}{j}\right)^{-1}$$

ومنها الدالة التراكمية:

$$\text{Log}\, M_W(t) = \text{Log} \prod_{j=s+1}^{n-s-1} \left(1 - \frac{t}{j}\right)^{-1}$$

$$= -\sum_{j=s+1}^{n-s-1} \text{Log}\left(1 - \frac{t}{j}\right) = -\sum_{j=s+1}^{n-s-1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \left(\frac{t}{j}\right)^i$$

وحيث إن الدالة التراكمية يمكن كتابتها على الصورة $\cdots + \frac{t^4 k_4}{4!} + \frac{t^3 k_3}{3!} + \frac{t^2 k_2}{2!} + \frac{t k_1}{1!}$ حيث:

$$k_1 = \mu_1 \quad , \quad k_2 = \mu_2 \quad , \quad k_3 = \mu_3 \quad , \quad k_4 = \mu_4 - 3\mu_2$$

$$\therefore k_1 = \mu_1 = \sum_{j=s+1}^{n-s-1} \frac{1}{j}$$

$$k_2 = \mu_2 = \sum_{j=s+1}^{n-s-1} \frac{1}{j^2}.$$

(٢-٨) المشمولات:
The Coverages

إن بعض الطرق اللامعلميه تعتمد على خاصية بسيطة للإحصاءات الترتيبية وهي أن توزيع المساحة تحت دالة الكثافة بين أي إحصائين ترتيبين يكون مستقل عن دالة الكثافة. ولتوضيح ذلك نفرض أن $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من مجتمع دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ ودالة التوزيع التجميعي له $F(x)$ وأن $a < Y_1 < Y_2 < \dots < Y_n < b$ هي الإحصاءات الترتيبية للعينة بوضع:

$$U_{(r)} = F(Y_r) \quad , \quad r = 1, 2, \cdots, n$$

وحيث إن $F(x)$ دالة تزايدية بإطراد فإن $0 < U_{(1)} < U_{(2)} < \cdots < U_{(n)} < 1$ تمثل الإحصاءات الترتيبية لعينة مسحوبة من مجتمع يتبع توزيع منتظم $U(0,1)$ ودالة الكثافة المشتركة لها هي:

$$g(u_1, u_2, \dots, u_n) = n! \prod_{i=1}^{n} f_U(u_i) = n!.$$

وإذا عرفنا الفرق بين أي إحصاءين $W_{rs} = U_{(s)} - U_{(r)}$ ، فقد برهنا في المثال(٢-١-١) إن توزيع W_{rs} يتبع توزيع بيتا بالمعالم $\alpha = s - r$, $\beta = n - s + r + 1$ وله دالة كثافة احتمال:

$$K_{r,s}(w) = \frac{n!}{(s-r-1)!(n-s+r)!} w^{s-r-1}(1-w)^{n-s+r} \quad , \quad 0 \le w \le 1,$$
$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

وكحالة خاصة عندما $r = 1$, $s = n$ فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء $W_{1n} = U_{(n)} - U_{(1)}$ هي:

$$K_{1,n}(w) = n(n-1)w^{n-2}(1-w) \quad , \quad 0 \le w \le 1,$$
$$= 0 \quad , \quad \text{e.w.}$$

وهي لا تعتمد على دالة الكثافة الأصلية $f(x)$ ولذلك يقال إن المتغير العشوائي W_{rs} له توزيع حر (خالي من المعالم) Free Distribution. ويمكننا حساب توقع W_{rs} من دالة كثافة الاحتمال $K_{r,s}(w)$ كالتالي:

$$E(W_{rs}) = \frac{n!}{(s-r-1)!(n-s+r)!} \int_0^1 w^{s-r}(1-w)^{n-s+r} dw$$
$$= \frac{n!}{(s-r-1)!(n-s+r)!} B(s-r+1, n-s+r+1)$$
$$= \frac{n!}{(s-r-1)!(n-s+r)!} \frac{(s-r)!(n-s+r)!}{(n+1)!}$$
$$= \frac{s-r}{n+1}.$$

تعريف (٢-٨-١):

إن المتغيرات (الإحصاءات):

$$C_1 = F(Y_{(1)}) - F(-\infty) = U_{(1)}$$
$$C_2 = F(Y_{(2)}) - F(Y_{(1)}) = U_{(2)} - U_{(1)}$$
$$C_3 = F(y_{(3)}) - F(Y_{(2)}) = U_{(3)} - U_{(2)}$$
$$\vdots$$
$$C_r = F(Y_r) - F(Y_{(r-1)}) = U_{(r)} - U_{(r-1)}$$
$$\vdots$$
$$C_n = F(Y_n) - F(Y_{n-1}) = U_{(n)} - U_{(n-1)}$$
$$C_{n+1} = F(\infty) - F(Y_n) = 1 - U_{(n)}.$$

تسمى المشمولات (أو المغطيات) أي أن المساحة بين أي إحصائين ترتيبين متتاليين تسمى مشمولة. وعلى ذلك فإن المتغير C_1 يسمى مشمولة أو غطاء الفترة العشوائية $x : -\infty < X < Y_1$ والإحصاء C_r يسمى مشمولة أو غطاء الفترة العشوائية $x : Y_{r-1} < X < Y_r$ ونلاحظ أن:

$$U_{(1)} = C_1$$
$$U_{(2)} = C_1 + C_2$$
$$U_{(3)} = C_3 + C_1 + C_2$$
$$\vdots$$
$$U_{(r)} = C_3 + C_1 + \cdots + C_r.$$

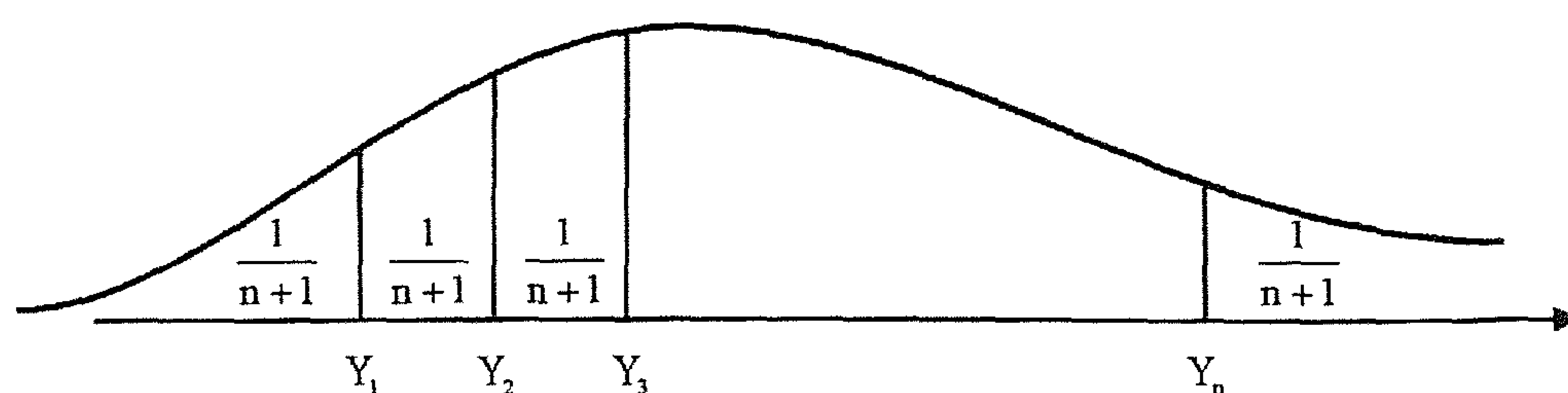
وبالتالي فإن $U_{(r)}$ غطاء أو مشمولة للفترة العشوائية $x : -\infty < X < Y_r$ كما أن $U_{(s)} - U_{(r)}$ تسمى مشمولة أو غطاء للفترة العشوائية $x : Y_r < X < Y_s$ والآن يمكن الحصول على دالة كثافة الاحتمال للمشمولة C_r وذلك بوضع $s = r \,, r = r - 1$:

$$K_{C_r}(z) = K(z) = n(1-z)^{n-1} \qquad , \quad 0 \le z \le 1,$$
$$= 0 \qquad , \quad \text{e.w.}$$

وهذا يعني أن كل مشمولة تتبع توزيع بيتا كما أن:

$$E(C_r) = \frac{1}{n+1} \quad , \quad Var(C_r) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}.$$

وبالتالي فإن الإحصاءات الترتيبية تقسم في المتوسط المساحة تحت منحنى $f(x)$ إلى $n+1$ جزء متساوي.



وتستخدم المشمولات في إيجاد فترات السماح كما سيتضح فيما يلي:

فترات السماح للتوزيعات:
Tolerance Limits for Distribution

نناقش في هذا الجزء موضوع مشابه لفترات الثقة يسمى فترات السماح . تستخدم فترات السماح بكثرة في الحياة العملية عندما نرغب في معرفة إذا كانت فترة ما تحتوي على نسبة محدودة من مفردات مجتمع ما .فمثلا إذا كنا ندرس كافة أطوال طلاب الجامعة ونرغب في معرفة احتمال إن فترة ما تحتوي على الأقل على 70% من أطوال الطلاب.

لذلك نفرض أن $X = X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينه عشوائية مختارة من مجتمع متصل دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ ودالة توزيعه التجميعي $F(x)$ وأن $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ هي الإحصاءات الترتيبية للعينة. وإذا كنا نرغب في إيجاد الفترة العشوائية (L_1, L_2) حيث L_1, L_2 إحصاءات من العينة :

$$L_1 < L_2 \quad , \quad L_2 = L_2(X) \quad , \quad L_1 = L_1(X),$$

بحيث أن الاحتمال γ (معامل السماح) أن الفترة تحتوي على الأقل نسبة p من المشاهدات في المجتمع، حيث γ, p ثوابت و $0 < p < 1 , 0 < \gamma < 1$.

أي إننا نحتاج إلى إيجاد L_1, L_2 بحيث إن:

$$P\left[P\left(L_1 < X < L_2\right) \geq p\right] = \gamma,$$

$$P\left(L_1 < X < L_2\right) = \int_{L_1}^{L_2} f(x)dx = F(L_2) - F(L_1) \geq p.$$

أي أن:

$$P\left[F(L_2) - F(L_1) \geq p\right] = \gamma .$$

والآن يمكن اختيار L_1, L_2 إحصاءات ترتيبية بحيث أن $L_1 = Y_r , L_2 = Y_s$. أي أننا نرغب في إيجاد

$$P\left[F(Y_s) - F(Y_r) \geq p\right] = \gamma ,$$

أو بصورة أخرى:

$$P\left[U_{(s)} - U_{(r)} \geq p\right] = \gamma \quad \Rightarrow \quad P\left[W_{rs} \geq p\right] = \gamma .$$

وحيث إن $W_{rs} = U_{(s)} - U_{(r)}$ متغير عشوائي توزيعه لا يعتمد على التوزيع $F(x)$ ويتبع توزيع بيتا وحيث إن هناك علاقة بين توزيع بيتا التوزيع ذي الحدين حيث:

$$I_p(r, n-r+1) = \sum_{i=r}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

$$\begin{aligned} P\left[W_{rs} \geq p\right] = \gamma \quad &\Rightarrow \quad \gamma = 1 - \int_0^p K_{r,s}(w)\,dw \\ &\Rightarrow \quad \gamma = 1 - I_p(s-r, n-s+r+1) \\ &\Rightarrow \quad \gamma = 1 - \sum_{i=s-r}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \\ &\Rightarrow \quad \gamma = \sum_{i=0}^{s-r-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}. \end{aligned}$$

وبحل هذه المعادلة نحصل على قيم r,s من جداول توزيع ذي الحدين.

مثال (٢-٨-١):

إذا كانت $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ عينة عشوائية مرتبه من توزيع متصل اوجد s , r التي تجعل الفترة (Y_r, Y_s) تحتوي على 50% من مفردات التوزيع بمعامل سماح $\gamma = .95$ حيث $n = 10$.

الحل:

نجد إن $p = .5$ وبالتالي فإن $r - s$ نوجدها من المعادلة

$$\gamma = \sum_{i=0}^{s-r-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i} \quad \Rightarrow \quad .95 = \sum_{i=0}^{s-r-1} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n ,n = 10$$

ومن جداول توزيع ذي الحدين في ملحق(١) نجد إن:

$$\sum_{i=0}^{8} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^n = .989.$$

أي أن:

$$s - r - 1 = 8 \quad \Rightarrow \quad s - r = 9 .$$

أي أننا أخذنا فترة سماح بمعامل سماح أكبر قليلاً من معامل السماح المطلوب. كما إن s,r الممكنة في هذه الحالة هي $s = 10, r = 1$.

في بعض الحالات يكون r,s معلومتين بحيث إن $s=n, r=1$ والمطلوب إيجاد معامل السماح γ

$$\therefore \gamma = \sum_{i=0}^{n-2}\binom{n}{i}p^{i}(1-p)^{n-i}$$
$$=1-p^{n}-np^{n-1}(1-p)$$
$$=1-np^{n-1}+(n-1)p^{n}.$$

مثال (٢-٨-٢):

إذا كانت $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية حجمها $n=7$ أحسب معامل السماح :

أ. إذا أخذنا (Y_1, Y_7) فترة سماح بنسبة 80% من التوزيع.

ب. إذا أخذنا (Y_2, Y_6) فترة سماح بنسبة 50% من التوزيع.

الحل:

أ. نلاحظ إن $n=7$, $r=1$, $s=7$, $p=.8$ وبالتالي فإن :

$$\gamma = 1-np^{n-1}+(n-1)p^{n}$$
$$=1-(7)(.8)^{6}-(6)(.8)^{7}$$
$$=.42.$$

ب. $n=7$, $r=2$, $s=6$, $p=.85$:

$$\gamma=\sum_{i=0}^{3}\binom{7}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$
$$=\frac{1}{128}\left[\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}\right]$$
$$=\frac{64}{128}=0.5.$$

يعني أن القيم بين الإحصائين (Y_2, Y_6) تعطي 50% من التوزيع وذلك بمعامل سماح 50%.

مثال (٢-٨-٣):

إذا كانت $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ عينة عشوائية مرتبه من توزيع متصل اوجد حجم العينة اللازم حتى نستطيع القول باحتمال قدره 0.85 أن على الأقل 70% من مفردات التوزيع تقع في مدى العينة.

الحل:

$$\gamma=.85 \quad , \quad p=.7 \quad , \quad s=n \quad , \quad r=1.$$

نريد تحديد n التي تحقق المعادلة:

$$.85 = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n}{i} (.7)^i (.3)^{n-i}$$

وبالبحث في جدول توزيع ذي الحدين في ملحق (١) تحت $p = .7$ نجد أن $n - 2 = 8$ عند $.851$ أي أن $n = 10$. ويمكن حل هذا المثال بطريقة أخرى حيث أن:

$$1 - n(0.7)^{n-1} + (n-1)(0.7)^n = 0.85$$

$$\Rightarrow \quad (0.7)^{n-1}[n - (n-1)(0.7)] = 0.15$$

$$\Rightarrow \quad (0.7)^{n-1}[(.3)n + 0.7)] = 0.15.$$

وبحل هذه المعادلة نجد أن $n = 10$.

نلاحظ أن فترة السماح عبارة عن إحصاءين احدهما اكبر من الأخر ويكونان فترة حدودها عشوائية وإننا نكون واثقين بمعامل سماح معين أن هذه الفترة تحتوي على نسبة محدودة من مفردات التوزيع.

(٢-٩) داله التوزيع التجميعى للعينة
Sample Cumulative Distribution Function

إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ عينة عشوائية من مجتمع داله توزيعه التجميعية $F(x)$ وكانت $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ الإحصاءات الترتيبية للعينة فإن داله التوزيع التجميعية لهذه العينة يرمز لها بالرمز $F_n(x)$ تعرف كالتالى:

$$F_n(x) = \frac{k}{n}$$

حيث k يمثل عدد قيم Y_i التي اقل من او تساوى x .

وعندما x ثابته نجد أن $F_n(x)$ احصاء لانها داله في بيانات العينة وبالتالى يكون لها توزيع احتمالى تحدده النظرية التالية:

$$P\left(F_n(x) = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} \{F(x)\}^k \{1 - F(x)\}^{n-k}$$

البرهان:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & -\infty \le X_i \le x \\ 0 & X_i > x \end{cases}$$

وعلى ذلك Z_i متغيراً عشوائياً يتبع توزيع برنولى بمعلمه $F(x)$. وبالتالى فإن ΣZ_i والذى يمثل عدد القيم X_i التى أقل من أو تساوى x يتبع توزيع ذى الحدين بمعالم $F(x)$, n.

ولكن:

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum Z_i$$

يكون لها نفس التوزيع مثل الوسط الحسابى لتوزيع برنولى وهى النتيجة المطلوبة. وعلى ذلك فإن:

$$E[F_n(x)] = F(x) \to E\{F_n(\nu)\} = F(\nu) = \frac{1}{2},$$

حيث ν هو وسيط المجتمع . ايضا:

$$Var[F_n(x)] = \frac{1}{n} F(x)\{1\text{-}F(x)\}$$

وهذا يعنى أن $F_n(x)$ (لقيم x الثابته) تكون مقدر غير متحيز للمعلمة $F(x)$. وعندما تكون n كبيرة فإن :

$$F_n(x) \approx N\left[F(x), \frac{1}{n}F(x)\{1 - F(x)\}\right]$$

أى أن:

$$\sqrt{n}\{F_n(x) - F(x)\} \approx N[0, F(x)\{1 - F(x)\}].$$

الباب الثالث

عزوم الإحصاءات الترتيبية

(٣-١) العزوم المضبوطة للإحصاءات الترتيبية:

تعتبر عزوم الإحصاءات الترتيبية مهمة وذلك لان هناك دوال خطيه من الترتيبات الإحصائية تستخدم في إيجاد مقدرات تستخدم في تقدير معالم المجتمع. وأيضاً فإن القيم المتوقعة للإحصاءات الترتيبية في عينة من توزيع معين غالباً ما تستخدم في مجال الاستدلال اللامعلمي.

وحيث إن الإحصاءات الترتيبية متغيرات عشوائية فإن عزومها تعرف بالطرق العادية . على سبيل المثال في الحالة المتصلة فإن العزم من الرتبة k حول الصفر للإحصاء الترتيبي Y_r في عينه عشوائية من حجم n مختارة من مجتمع بدالة توزيع تجميعي $F(x)$ هي:

$$E(Y_r^k)=\int_{-\infty}^{\infty} x^k g_r(x)dx$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r}dx.$$

وبنفس الشكل العزوم حول الصفر من الرتبة k,ℓ للمتغيرين Y_r, Y_s $(r<s)$ هي:

$$E\left(Y_r^k Y_s^\ell\right)=\frac{n!}{(r-1)!\,(s-r-1)!\,(n-s)!}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} x^k y^\ell f(x)f(y)[F(x)]^{r-1}[F(y)-F(x)]^{s-r-1}[1-F(y)]^{n-s}dx\,dy.$$

وفي كثير من الأحيان لا يمكن الحصول على العزوم السابقة بالضبط.

مثال (٣-١-١):

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من الحجم n سحبت من التوزيع المنتظم في الفترة $(0,1)$. المطلوب إيجاد الوسط الحسابي والتباين والتغاير للإحصاءات الترتيبية.

الحل :

دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_r تعطى كالتالي:

$$g_r(x)=\begin{cases}\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}x^{r-1}(1-x)^{n-r} & , \quad 0<x<1,\\ 0 & , \quad \text{e.w.}\end{cases}$$

$$\therefore E(Y_r^k)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_{-\infty}^{\infty} x^{r+k-1}(1-x)^{n-r}dx$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} B(r+k, n-r+1)$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \frac{(r+k-1)!(n-r)!}{(n+k)!}$$

$$= \frac{n!(r+k-1)!}{(r-1)!(n+k)!} \quad , \quad 1 \le r \le n.$$

حيث k عدد صحيح موجب. وبوضع $k=1$ نحصل على الوسط الحسابي وهو:

$$E(Y_r) = \frac{r}{n+1}.$$

والتباين هو:

$$Var(Y_r) = E\left(Y_r^2\right) - \left[E(Y_r)\right]^2$$

$$= \frac{r(r+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{r^2}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{r(r+1)(n+1) - r^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{r^2 n + r^2 + rn + r - r^2 n - 2r^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

$$= \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

وللحصول على التغاير لزوج من الإحصاءات الترتيبية Y_r, Y_s نحتاج إلى دالة الكثافة المشتركة لهما والتي تعطى كما يلي:

$$g_{r,s}(x,y) = C x^{r-1}(y-x)^{s-r-1}(1-y)^{n-s} \quad , \quad 0 \le x < y \le 1,$$
$$= 0 \quad , \quad e.w.$$

حيث: $C = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}$،

$$\therefore E(Y_r Y_s) = C \int_0^1 \int_0^y x^r y (y-x)^{s-r-1} (1-y)^{n-s} \, dx \, dy.$$

بأخذ التعويض:

$$z = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x = yz \quad , \quad dx = y\,dz.$$

$$\therefore E(Y_r Y_s) = C \int_0^1 y(1-y)^{n-s} \int_0^1 (zy)^r (y-zy)^{s-r-1} y \, dz \, dy$$

$$=C\int_0^1 y^{s+1}(1-y)^{n-s}\int_0^1 z^r(1-z)^{s-r-1}dz\,dy$$

$$=CB(s+2,n-s+1)B(r+1,s-r)$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\frac{(s+1)!(n-s)!}{(n+2)!}\frac{r!(s-r+1)!}{s!}.$$

$$\therefore E(Y_rY_s)=\frac{r(s+1)}{(n+2)(n+1)},$$

التغاير بين Y_r, Y_s هو:

$$\begin{aligned}Cov(Y_r,Y_s)&=E(Y_rY_s)-E(Y_r)E(Y_s)\\&=\frac{r(s+1)}{(n+1)(n+2)}-\frac{rs}{(n+1)^2}\\&=\frac{r(n-s+1)}{(n+1)^2(n+2)},\quad r<s,\end{aligned}$$

معامل الارتباط بين Y_r, Y_s هو:

$$\begin{aligned}\rho_{r,s}&=\frac{Cov(Y_r,Y_s)}{\sqrt{Var(Y_r)Var(Y_s)}}\\&=\frac{\frac{r(n-s+1)}{(n+1)^2(n+2)}}{\sqrt{\frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}\frac{s(n-s+1)}{(n+1)^2(n+2)}}}\\&=\sqrt{\frac{r(n-s+1)}{s(n-r+1)}}.\end{aligned}$$

وكحالة خاصة معامل الارتباط بين أصغر وأكبر القيم نحصل عليه بوضع $s=n, r=1$ حيث:

$$\rho_{1,n}=\sqrt{\frac{(1)(n-n+1)}{(n)(n-1+1)}}=\frac{1}{n}.$$

يلاحظ من المعادلة السابقة إن معامل الارتباط يتناسب عكسياً مع حجم العينة.

مثال (٣-١-٢):

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من الحجم n سحبت من التوزيع الأسـي بمعلمـة θ.
المطلوب إيجاد الوسط الحسابي والتباين لكل من Y_r, Y_s والتغاير بين Y_r, Y_s.

الحل:

بالعودة إلى المثال (١-٣-٢) عرفنا المتغيرات العشوائية:

$$W_i = Y_i - Y_{i-1} \quad , \quad i = 1,2,\dots,n \quad , \quad Y_0 = 0,$$

وبرهنا أن كل منها مستقل ويتبع التوزيع الأسي حيث:

$$W_i \sim Exp\left(\frac{\theta}{n-i+1}\right),$$

وبالتحويل العكسي:

$$Y_r = \sum_{i=1}^{r} W_i.$$

ومنه يمكن حساب الوسط الحسابي للإحصاء الترتيبي Y_r كالتالي:

$$\begin{aligned} E(Y_r) &= E\left(\sum_{i=1}^{r} W_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r} E(W_i) \\ &= \sum_{i=1}^{r} \frac{\theta}{n-i+1} \\ &= \theta \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n-i+1}. \end{aligned}$$

القيم المتوقعة للإحصاءات الترتيبية، $E(Y_r)$ في عينات من الحجم n من توزيع أسي قياسي $(\theta = 1)$ معطاة في الجدول (٣-١) .

جدول (٣-١)

r/n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	0.125	0.111	0.100
2	1.500	0.833	0.583	0.450	0.367	0.310	0.268	0.236	0.211
3		1.833	1.083	0.783	0.617	0.510	0.435	0.379	0.336
4			2.083	1.283	0.950	0.760	0.635	0.546	0.479
5				2.283	1.450	1.093	0.885	0.746	0.646
6					2.450	1.593	1.218	0.996	0.846
7						2.593	1.718	1.329	1.096
8							2.718	1.829	1.429
9								2.829	1.929
10									2.929

من الجدول (٣-١) نجد أن القيم المتوقعة $E(Y_r),(r = 1,2,\cdots,n)$ معطاة لقيم $n = 2(1)10$ وتسمى هذه القيم درجات أسية score exponential ولها تطبيقات مفيدة في الاستدلال اللامعلمي.

التباين للإحصاء الترتيبي Y_r هو:

$$\begin{aligned}
Var(Y_r) &= Var\left(\sum_{i=1}^{r} W_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} Var(W_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \frac{\theta^2}{(n-i+1)^2} \\
&= \theta^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{(n-i+1)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y_r Y_s) &= E\left[\left(\sum_{i=1}^{r} W_i\right)\left(\sum_{j=1}^{s} W_j\right)\right] \\
&= E\left(\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} W_i W_j\right) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^{r} W_i^2\right) + E\left(\sum_{j=1}^{s}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} W_i W_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} E(W_i^2) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} E(W_i W_j).
\end{aligned}$$

وحيث إن:

$$\begin{aligned}
E(W_i^2) &= Var(W_i) + [E(W_i)]^2 \\
&= \frac{\theta^2}{(n-i+1)^2} + \frac{\theta^2}{(n-i+1)^2} \\
&= \frac{2\theta^2}{(n-i+1)^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(W_i W_j) &= E(W_i)E(W_j) \\
&= \frac{\theta^2}{(n-i+1)(n-j+1)},
\end{aligned}$$

$$E(Y_r Y_s) = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{2\theta^2}{(n-i+1)^2}\right) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r}\left(\frac{\theta^2}{(n-i+1)(n-j+1)}\right).$$

ويمكن استخدامه لحساب التغاير بين أي إحصاءين ترتيبيين أو يمكن حساب التغاير كالتالي:

$$\operatorname{Cov}(Y_r, Y_s) = \operatorname{Cov}\left(\sum_{i=1}^{r} W_i \,,\, \sum_{j=1}^{s} W_j\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r} \operatorname{Cov}(W_i, W_j)$$

وحيث إن المتغيرات W_i مستقلة فإن:

$$\operatorname{Cov}(W_i, W_j) = \begin{cases} 0 & , \quad i \neq j \\ \operatorname{Var}(W_i) & , \quad i = j \end{cases}$$

$$\operatorname{Cov}(Y_r, Y_s) = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Var}(W_i) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{r} \operatorname{Cov}(W_i, W_j)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \operatorname{Var}(W_i)$$
$$= \theta^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{(n-i+1)^2}.$$

وكحالة خاصة عندما $s = n, r = 1$ فإن:

$$\operatorname{Cov}(Y_1, Y_n) = \frac{\theta^2}{n^2}.$$

مثال (٣-١-٣):

في اختبارات الحياة، وضعت عينة عشوائية من الحجم $n = 9$ في الاختبار. أزمنة الحياة بالساعات لوحدات التجربة يمكن اعتبارهم متغيرات عشوائية مستقلة من توزيع أسي بمتوسط حياة $\mu = 100$ ساعة. لحساب التوفير في زمن الحياة الكلي عند إنهاء التجربة بعد فشل الوحدة رقم $5 (r = 5)$. وإذا كان $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n$ تمثل أزمنة الحياة المرتبة للوحدات، فإن Y_9 تمثل زمن انتهاء التجربة بعد فشل جميع الوحدات التي عددها $n = 9$ ووسيط العينة Y_5 يمثل زمن انتهاء التجربة إذا أوقفنا التجربة بعد فشل الوحدة رقم 5. من جدول(٣-١)، نجد أنه لعينة عشوائية من الحجم $n = 9$ من توزيع أسي قياسي، فإن القيمة المتوقعة لأكبر الإحصاءات الترتيبية هو 2.829 والقيم المتوقعة للإحصاء الترتيبي من الرتبة 5 هو 0.746. وعلى ذلك

$$E(Y_9) = 100(2.829) = 282.9,$$
$$E(Y_5) = 100(0.746) = 74.6.$$

وعلى ذلك النسبة المئوية للاختزال في زمن الحياة هو:

$$\frac{282.9 - 74.6}{282.9} = 73.6\%.$$

مثال (٣-١-٤):

بفرض أن $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n$ تمثل الإحصاءات الترتيبية من عينة عشوائية من الحجم n مختارة من توزيع طبيعي قياسي $N(0,1)$. سوف نستخدم الرمز $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ والرمز $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(t)dt$ لتعبر عن دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التجميعي للتوزيع الطبيعي القياسي. العزوم من الرتبة k للإحصاء الترتيبي من الرتبة r حول الصفر نحصل عليه كالتالي:

$$E(Y_r^k) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x)\left[\Phi(x)\right]^{r-1}\left[1-\Phi(x)\right]^{n-r} dx$$

أيضاً:

$$E(Y_r^k Y_s^m) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} x^k y^m \phi(x)\phi(y) \left[\Phi(x)\right]^{r-1}\left[\Phi(y)-\Phi(x)\right]^{s-r-1}\left[1-\Phi(y)\right]^{n-s} dx\,dy$$

وبوضع $r = n$ يصبح التوقع لـ Y_n هو:

$$E(Y_n) = n\int_{-\infty}^{\infty} x\,\phi(x)\left[\Phi(x)\right]^{n-1} dx$$

وبما أن $x\phi(x) = -\phi'(x)$ فإن:

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= -n\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x)\left[\Phi(x)\right]^{n-1} dx \\ &= -n\left[\phi(x)\left[\Phi(x)\right]^{n-1}\Big|_{-\infty}^{\infty}\right] + n(n-1)\int_{-\infty}^{\infty} \phi^2(x)\left[\Phi(x)\right]^{n-2} dx \\ &= \frac{n(n-1)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\left[\Phi(x)\right]^{n-2} dx. \end{aligned}$$

عندما n صغيرة، فإن التكاملات في التوقع يمكن إيجادها بطرق التحليل العددي وهناك جداول خاصة للعزوم من الرتب الصغيرة. على سبيل المثال Harter (1961) أوجد القيم المتوقعة للإحصاءات الترتيبية للتوزيع الطبيعي وذلك لقيم $n = 2(1)100$.

(٣-٢) بعض العلاقات التكراريه للعزوم

(أ) علاقة تكرارية للعزم من الرتبه k للاحصاء الترتيبى Y_r بدلاله عزوم أكبر الاحصاءات الترتيبية.

لتكن $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n$ تمثل الإحصاءات الترتيبية في عينة عشوائية من الحجم n مختارة من توزيع متصل له دالة توزيع تجميعي $F(x)$. المطلوب إثبات أن:

$$E\left(Y_r^k \middle| n\right) = n\binom{n-1}{r-1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-r}{j}\frac{E\left(Y_{r+j}^k \middle| r+j\right)}{r+j}$$

الحل :

$$\because E\left(Y_n^k \middle| n\right) = n\int_{-\infty}^{\infty} x^k\left[F(x)\right]^{n-1} f(x)dx \qquad (١٠٣)$$

الآن:

$$\begin{aligned} E\left(Y_r^k \middle| n\right) &= n\binom{n-1}{r-1}\int_{-\infty}^{\infty} x^k\left[F(x)\right]^{r-1}\left[1-F(x)\right]^{n-r} f(x)\,dx \\ &= n\binom{n-1}{r-1}\sum_{j=0}^{n-r}(-1)^j\binom{n-r}{j}\int_{-\infty}^{\infty} x^k\left[F(x)\right]^{r+j-1} f(x)\,dx \end{aligned} \qquad (٢٠٣)$$

ويمكن إثبات أن التكامل السابق يساوي $E\left(Y_{r+j}^k \middle| r+j\right)\Big/ r+j$ وذلك بالاستفادة من (١٠٣).

وعلى ذلك:

$$E\left(Y_r^k \middle| n\right) = n\binom{n-1}{r-1}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-r}{j}\frac{E\left(Y_{r+j}^k \middle| r+j\right)}{r+j} \qquad (٣٠٣)$$

العلاقة السابقة تعطينا علاقة تكرارية للعزوم بدلالة العزوم لأكبر إحصاء ترتيبي. على سبيل المثال بوضع $n = 5, r = 3, k = 1$ نحصل على:

$$E\left(Y_3 \middle| 5\right) = 10E\left(Y_3 \middle| 3\right) - 15E\left(Y_4 \middle| 4\right) + 6E\left(Y_5 \middle| 5\right),$$

والتي تعطي التوقعات للوسيط في عينة عشوائية من الحجم $n = 5$ بدلالة التوقعات لأكبر الإحصاءات الترتيبية في عينات من الحجم $3,4,5$.

(ب) علاقة تكرارية للعزم من الرتبة k للاحصاء الترتيبى Y_r بدلاله عزوم اصغر الاحصاءات الترتيبية.

$$\begin{aligned} \because \left[F(x)\right]^{r-1} &= \left\{1-\left[1-F(x)\right]\right\}^{r-1} \\ &= \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}\left[1-F(x)\right]^j \end{aligned}$$

وبوضعها في (٢٠٣) نحصل على:

$$E\left(Y_r^k\middle|n\right)=n\binom{n-1}{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}\int_{-\infty}^{\infty}x^k[1-F(x)]^{n-r+j}f(x)dx$$
$$=n\binom{n-1}{r-1}\sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r-1}{j}\frac{E\left(Y_{n-r+j+1}^k\middle|n-r+j+1\right)}{n-r+j+1}. \qquad (٤٠٣)$$

(ج) علاقة تكرارية لتوقع المدى:

عندما يكون n عدد فردي وبوضع $r=k=1$ وإحلال $(2n+1)$ بدلاً مـــن n فى (٣٠٣) نحصل على:

$$E\left(Y_{2n+1}\middle|2n+1\right)-E\left(Y_1\middle|2n+1\right)=(2n+1)\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^{j+1}\binom{2n}{j}\frac{E\left(Y_{j+1}\middle|j+1\right)}{j+1} \qquad (٥٠٣)$$

وبنفس الشكل، بوضع $k=1,r=n$ ثم استبدال n بـــ $(2n+1)$ في (٤٠٣) نحصل على:

$$E\left(Y_{2n+1}\middle|2n+1\right)-E\left(Y_1\middle|_{2n+1}\right)=(2n+1)\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^{j}\binom{2n}{j}\frac{E\left(Y_1\middle|j+1\right)}{j+1} \qquad (٦٠٣)$$

وبجمع (٥٠٣) و (٦٠٣) نحصل على:

$$2E\left(W\middle|2n+1\right)=(2n+1)\sum_{j=0}^{2n-1}(-1)^{j+1}\binom{2n}{j}\frac{E\left(W\middle|j+1\right)}{j+1}$$

وكحالة خاصة عندما $n=1,2$ حصل على:

$$E\left(W\middle|3\right)=(3/2)E\left(W\middle|2\right),$$
$$E\left(W\middle|5\right)=(5/2)E\left(W\middle|4\right)-(5/3)E\left(W\middle|3\right)$$

على التوالي. النتائج السابقة تتحقق للمجتمعات بدالة احتمال متصلة.

(٣-٣) القيم المتوقعة للفرق بين إحصاءين متتاليين:

عرفنا من قبل المتغير $Y_{r+1}-Y_r$ الذي يمثل الفرق بين إحصاءين ترتيبيين متتاليين والآن سنحاول إيجاد التوقع لـــ $Y_{r+1}-Y_r$ ، ولا حاجة هنا لإيجاد دالة كثافة الاحتمال له بل سنحتاج لدالة كثافـــة الاحتمال المشتركة لـــ Y_{r+1},Y_r فقط حيث:

$$g_{r,r+1}(x,y)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}f(x)\,f(y)[F(x)]^{r-1}[1-F(y)]^{n-r-1}$$

$$,\quad -\infty\le x<y\le\infty.$$

$$E(Y_{r+1}-Y_r)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}(y-x)f(x)f(y)[F(x)]^{r-1}[1-F(y)]^{n-r-1}\,dx\,dy$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)[1-F(y)]^{n-r-1}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{y}(y-x)f(x)\,[F(x)]^{r-1}\,dx\,dy.$$

ولحساب التكامل $I=\int_{-\infty}^{y}(y-x)f(x)\,[F(x)]^{r-1}\,dx$ بالتجزيء وباختيار:

$$u=y-x\quad,\quad dv=f(x)\,[F(x)]^{r-1}\,dx$$

$$du=-dx\quad,\quad v=\frac{1}{r}[F(x)]^{r}.$$

$$\therefore I=\frac{1}{r}(y-x)[F(x)]^{r}\Big|_{-\infty}^{y}+\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{y}[F(x)]^{r}\,dx$$

$$=\frac{1}{r}\int_{-\infty}^{y}[F(x)]^{r}\,dx$$

$$=\frac{1}{r}u,$$

$$E(Y_{r+1}-Y_r)=\frac{n!}{r!(n-r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)[1-F(y)]^{n-r-1}\,u\,dx$$

ولنكامل بالتجزيء مرة أخرى باختيار:

$$u=\int_{-\infty}^{y}[F(x)]^{r}\,dx,\quad dv=f(y)[1-F(y)]^{n-r-1},$$

$$du=[F(y)]^{r},\qquad v=\frac{-1}{n-r}[1-F(y)]^{n-r}.$$

$$\therefore E(Y_{r+1}-Y_r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}\left[-[1-F(y)]^{n-r}\int_{-\infty}^{y}[F(x)]^r dx\Big|_{-\infty}^{\infty}\right]$$

$$+\frac{n!}{r!(n-r)!}\int_{-\infty}^{\infty}[F(y)]^r[1-F(y)]^{n-r}dy$$

$$E(Y_{r+1}-Y_r)=\binom{n}{r}\int_{-\infty}^{\infty}[F(y)]^r[1-F(y)]^{n-r}dy.$$

ويمكن حساب هذا التوقع بطريقة أخرى كالتالي:

$$E(Y_r)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r}dx.$$

ولنكامل بالتجزيء باختيار:

$$u=x[1-F(x)]^{n-r},\;\; dv=f(x)\,[F(x)]^{r-1}dx$$

$$\therefore du=[1-F(x)]^{n-r}-(n-r)x\,f(x)[1-F(x)]^{n-r-1},$$

$$v=\frac{1}{r}[F(x)]^r.$$

$$\therefore E(Y_r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}x[F(x)]^r[1-F(x)]^{n-r}\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$+\frac{n!}{r!(n-r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x)[F(x)]^r[1-F(x)]^{n-r-1}dx$$

$$-\frac{n!}{r!(n-r)!}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x)]^r[1-F(x)]^{n-r}dx$$

$$=0+E(Y_{r+1})-\frac{n!}{r!(n-r)!}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x)]^r[1-F(x)]^{n-r}dx.$$

$$\therefore E(Y_r)=E(Y_{r+1})-\frac{n!}{r!(n-r)!}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x)]^r[1-F(x)]^{n-r}dx$$

$$\Rightarrow\quad E(Y_{r+1}-Y_r)=\binom{n}{r}\int_{-\infty}^{\infty}[F(y)]^r[1-F(y)]^{n-r}dy.$$

ويمكن الاستفادة من توقع $Y_{r+1}-Y_r$ لإيجاد توقع المدى للعينه حيث:

$$W=\sum_{r=1}^{n-1}(Y_{r+1}-Y_r).$$

$$\Rightarrow \quad E(W)=\sum_{r=1}^{n-1}E(Y_{r+1}-Y_r)$$

$$=\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}\int_{-\infty}^{\infty}[F(y)]^r[1-F(y)]^{n-r}\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}[F(y)]^r[1-F(y)]^{n-r}\,dy.$$

ومن نظرية ذى الحدين فإن:

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}[F(y)]^r[1-F(y)]^{n-r}=[F(y)+1-F(y)]^n=1$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{r=1}^{n-1}\binom{n}{r}[F(y)]^r[1-F(y)]^{n-r}=1-[F(y)]^n-[1-F(y)]^n$$

$$\therefore E(W)=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{1-[F(y)]^n-[1-F(y)]^n\right\}dy.$$

مثال (٣-٣-١):

لتكن $X_1,X_2,\ldots,X_n$ عينة عشوائية من الحجم n سحبت من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال:

$$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)} \quad , \quad x\ge\eta \quad , \quad \theta>0$$

أوجد القيمة المتوقعة للإحصاء الترتيبي Y_n.

الحل :

نستخدم العلاقة بين المدى للعينة W والإحصاء Y_n حيث:

$$W=Y_n-Y_1 \quad \Rightarrow \quad Y_n=W+Y_1$$

ولنبدأ بإيجاد توقع المدى للعينة W كالتالي:

$$F(x)=1-e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)},$$

$$1-F(x)=e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)},$$

$$\because E(Y_{r+1}-Y_r)=\binom{n}{r}\int_{\eta}^{\infty}[F(y)]^r[1-F(y)]^{n-r}\,dy$$

$$=\binom{n}{r}\int_{\eta}^{\infty}\left[1-e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)}\right]^r\left[e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)}\right]^{n-r}dy.$$

وبأخذ التعويض:

$$y = e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)} \quad \Rightarrow \quad dy = \frac{-1}{\theta} y\,dx.$$

$$\therefore E(Y_{r+1} - Y_r) = \theta \binom{n}{r} \int_0^1 y^{n-r-1}(1-y)^r dy$$

$$= \theta \frac{n!}{r!(n-r)!} \frac{r!(n-r-1)!}{n!}$$

$$= \frac{\theta}{n-r}.$$

ومنها يمكن حساب توقع المدى للعينة كالتالي:

$$E(W) = \sum_{r=1}^{n-1} E(Y_{r+1} - Y_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\theta}{n-r}.$$

والآن نحتاج لحساب توقع Y_1 ، ونحسبها من دالة كثافة الاحتمال التالية:

$$g_1(x) = n f(x)[1 - F(y)]^{n-1}$$

$$= \frac{n}{\theta} e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)} \left[e^{-\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)} \right]^{n-1}$$

$$= \frac{n}{\theta} e^{-n\left(\frac{x-\eta}{\theta}\right)} \quad , \quad x \geq \eta.$$

وهذه دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائى يتبع التوزيع الأسي بالمعالم $\text{Exp}\left(\frac{\theta}{n}, \eta\right)$. وبالتالي فإن:

$$E(Y_1) = \frac{\theta}{n} + \eta.$$

ومنها نوجد توقع Y_n كالتالي:

$$E(Y_n) = E(W) + E(Y_1)$$

$$= \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\theta}{n-r} + \frac{\theta}{n} + \eta$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\theta}{n-r} + \eta.$$

(٣-٤) العزم من الرتبة k للفرق بين إحصاءين متتاليين:

$$E(Y_{r+1}-Y_r)^k=\frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}(y-x)^k f(x)f(y)[F(x)]^{r-1}[1-F(y)]^{n-r-1}\,dx\,dy$$
$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)[1-F(y)]^{n-r-1}$$
$$\int_{-\infty}^{y}(y-x)^k f(x)\,[F(x)]^{r-1}\,dx\,dy.$$

ولحساب التكامل $I_1=\int_{-\infty}^{y}(y-x)^k f(x)\,[F(x)]^{r-1}\,dx$ بالتجزيء وباختيار:

$$u=(y-x)^k \qquad , \qquad dv=f(x)\,[F(x)]^{r-1}\,dx,$$
$$\therefore du=k\,(y-x)^{k-1}dx \qquad , \qquad v=\frac{1}{r}[F(x)]^r.$$
$$\therefore I_1=\frac{1}{r}(y-x)^k[F(x)]^r\Big|_{-\infty}^{y}+\frac{k}{r}\int_{-\infty}^{y}(y-x)^{k-1}[F(x)]^r\,dx$$
$$=\frac{k}{r}\int_{-\infty}^{y}(y-x)^{k-1}[F(x)]^r\,dx.$$
$$\therefore E(Y_{r+1}-Y_r)^k=k\frac{n!}{r!(n-r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}(y-x)^{k-1}f(y)[1-F(y)]^{n-r-1}[F(x)]^r\,dx\,dy$$
$$=k\frac{n!}{r!(n-r-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}[F(x)]^r\int_{x}^{\infty}(y-x)^{k-1}f(y)[1-F(y)]^{n-r-1}\,dy\,dx.$$

ولحساب التكامل $I_2=\int_{x}^{\infty}(y-x)^{k-1}f(y)[1-F(y)]^{n-r-1}\,dy$ بالتجزيء وباختيار:

$$u=(y-x)^{k-1} \qquad , \qquad dv=f(y)[1-F(y)]^{n-r-1}\,dy,$$
$$\therefore du=(k-1)(y-x)^{k-2} \qquad , \qquad v=\frac{-[1-F(y)]^{n-r}}{n-r}.$$

$$\therefore I_2 = \frac{-1}{n-r}(y-x)^{k-1}\left[1-F(y)\right]^{n-r}\Big|_x^{\infty}$$

$$+\frac{k-1}{n-r}\int_x^{\infty}(y-x)^{k-2}\left[1-F(y)\right]^{n-r}dy$$

$$=\frac{k-1}{n-r}\int_x^{\infty}(y-x)^{k-2}\left[1-F(y)\right]^{n-r}dy.$$

$$\therefore E(Y_{r+1}-Y_r)^k = k(k-1)\frac{n!}{r!(n-r)!}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(x)\right]^r\int_x^{\infty}(y-x)^{k-2}\left[1-F(y)\right]^{n-r}dy\,dx$$

$$=k(k-1)\binom{n}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}(y-x)^{k-2}\left[F(x)\right]^r\left[1-F(y)\right]^{n-r}dx\,dy.$$

وعند وضع $k=2,3,4$ نحصل على:

$$E(Y_{r+1}-Y_r)^2 = 2\binom{n}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}\left[F(x)\right]^r\left[1-F(y)\right]^{n-r}dx\,dy,$$

$$E(Y_{r+1}-Y_r)^3 = 6\binom{n}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}(y-x)\left[F(x)\right]^r\left[1-F(y)\right]^{n-r}dx\,dy,$$

$$E(Y_{r+1}-Y_r)^4 = 12\binom{n}{r}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}(y-x)^2\left[F(x)\right]^r\left[1-F(y)\right]^{n-r}dx\,dy.$$

(٣-٥) حساب $E(Y_{r+1}^2-Y_r^2)$, $E\left(Y_{r+1}^2\right)-E\left(Y_r^2\right)$ لبعض التوزيعات:

مثال (٣-٥-١):

أحسب التوقع $E(Y_{r+1}^2-Y_r^2)$ لعينة تتبع التوزيع الأسي بمعلمة θ.

الحل :

$$E(Y_r^2)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)\left[F(x)\right]^{r-1}\left[1-F(x)\right]^{n-r}dx.$$

ولنكامل بالتجزيء وباختيار:

$$u=x^2\left[1-F(x)\right]^{n-r}\quad,\qquad dv=f(x)\left[F(x)\right]^{r-1}dx,$$

$$du=2x\left[1-F(x)\right]^{n-r}-(n-r)x^2f(x)\left[1-F(x)\right]^{n-r-1},$$

$$v=\frac{1}{r}\left[F(x)\right]^r,$$

$$E(Y_r^2) = \frac{n!}{r!(n-r)!} x^2 [F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$+\frac{n!}{r!(n-r-1)!} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)[F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r-1} dx$$

$$-\frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x[F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx$$

$$= 0 + E(Y_{r+1}^2) - \frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x[F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx.$$

$$\therefore E(Y_r^2) = E(Y_{r+1}^2) - \frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x[F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx$$

$$E(Y_{r+1}^2 - Y_r^2) = \frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x[F(x)]^r [1-F(x)]^{n-r} dx.$$

وعندما تكون العينة مسحوبة من توزيع أسي فإن:

$$E(Y_{r+1}^2 - Y_r^2) = \frac{2n!}{r!(n-r)!} \int_{-\infty}^{\infty} x\left[1-e^{-x/\theta}\right]^r \left[e^{-x/\theta}\right]^{n-r} dx$$

$$= \frac{2n!}{r!(n-r)!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-(n-r+j)x/\theta} dx$$

$$= \frac{2n!}{r!(n-r)!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j \frac{\theta^2}{(n-r+j)^2}.$$

مثال (٣-٥-٢):

ليكن:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{2}x^2}, & 0 < x < \infty \\ 0, & e.w. \end{cases}$$

أثبت أن $E\left(Y_{r+1}^2\right) - E\left(Y_r^2\right) = \frac{2}{n-r}$.

الحل :

دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي من الرتبة r هي:

$$g_r(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\left(1-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{r-1}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{n-r} \cdot x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

$$\therefore E(Y_r^2)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^\infty x^3\left(1-e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{r-1}\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^{n-r}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^\infty x^3\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\binom{r-1}{i}e^{-\frac{1}{2}x^2(n-r+i+1)}dx$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\binom{r-1}{i}\int_0^\infty x^3e^{-\frac{1}{2}x^2(n-r+i+1)}dx$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\binom{r-1}{i}\int_0^\infty x^2d\left\{\frac{-e^{-\frac{1}{2}x^2(n-r+i+1)}}{n-r+i+1}\right\}$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\binom{r-1}{i}\left[\left.\frac{-x^2e^{-\frac{1}{2}x^2(n-r+i+1)}}{n-r+i+1}\right|_0^\infty+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{n-r+i+1}\int_0^\infty xe^{-\frac{1}{2}x^2(n-r+i+1)}dx\right]$$

$$=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\binom{r-1}{i}\frac{2}{(n-r+i+1)^2}.$$

وبنفس الشكل:

$$E(Y_{r+1}^2)=\frac{n!}{r!(n-r-1)!}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\frac{2}{(n-r+i)^2}$$

أو يمكن كتابة التوقعين السابقين كالتالي:

$$E(Y_r^2)=\frac{2n!}{r!(n-r)!}\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\frac{r!}{i!(r-i-1)!}\cdot\frac{1}{(n-r+i+1)^2},$$

$$E(Y_{r+1}^2)=\frac{2n!}{r!(n-r)!}\left[\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\frac{r!(n-r)}{i!(r-i)!}\cdot\frac{1}{(n-r+i)^2}+(-1)^r\frac{(n-r)}{n^2}\right].$$

$$\therefore E(Y_{r+1}^2)-E(Y_r^2)=\frac{2n!}{r!(n-r)!}\left\{\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\frac{r!}{i!(r-i-1)!}\cdot\left[\frac{(n-r)}{r-i}\frac{1}{(n-r+i)^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{(n-r+i+1)^2}\right]+(-1)^r\frac{(n-r)}{n^2}\right\}$$

$$=\frac{2n!}{r!(n-r)!}\left[\frac{1}{n-r}-\binom{r}{1}\frac{1}{n-r+1}+\cdots+(-1)^r\frac{1}{n}\right]$$

$$=\frac{2n!}{r!(n-r)!}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}\frac{1}{n-r+i}$$

$$=\frac{2n!}{r!(n-r)!}\int_0^1\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}y^{n-r+i-1}\,dy$$

$$=\frac{2n!}{r!(n-r)!}\int_0^1 y^{n-r-1}(1-y)^r\,dy$$

$$=\frac{2n!}{r!(n-r)!}B(n-r,r+1)=\frac{2}{n-r}.$$

(٣-٦) عزوم الإحصاءين W', W :

في هذا القسم سوف نوجد العزوم لإحصاءين مهمين في النواحي التطبيقية وهما:

$$W=n\,F(Y_r),$$
$$W'=n\left[1-F(Y_{n-r+1})\right].$$

في البدء نوجد دالة كثافة الاحتمال لــ W بالاعتماد على دالة الكثافة للإحصاء Y_r حيث:

$$g_r(x)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}f(x)\left[F(x)\right]^{r-1}\left[1-F(x)\right]^{n-r}.$$

وبأخذ التحويل:

$$w=n\,F(x)\quad\Rightarrow\quad\left|\frac{dx}{dw}\right|=\frac{1}{n\,f(x)}.$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير W هي:

$$g(w)=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\left(\frac{w}{n}\right)^{r-1}\left(1-\frac{w}{n}\right)^{n-r}\quad,\quad 0<w<n,$$

وبالمثل إذا أردنا إيجاد دالة كثافة الاحتمال لــ W' بالاعتماد على دالة الكثافة للإحصاء Y_{n-r+1} فإن:

$$g_{n-r+1}(x)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}f(x)\left[F(x)\right]^{n-r}\left[1-F(x)\right]^{r-1}.$$

وبأخذ التحويل:

$$w'=n\left[1-F(x)\right]\quad\Rightarrow\quad\left|\frac{dx}{dw'}\right|=\frac{1}{n\,f(x)},$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير W' هي:

$$g(w')=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\left(1-\frac{w'}{n}\right)^{n-r}\left(\frac{w'}{n}\right)^{r-1} \quad , \quad 0<w'<n.$$

مما يعني أن لهما نفس دالة الكثافة وبالتالي سيكون لهما نفس العزوم.

$$E(W^k)=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^n w^k\left(\frac{w}{n}\right)^{r-1}\left(1-\frac{w}{n}\right)^{n-r}dw.$$

وبالتعويض:

$$t=\frac{w}{n} \quad \Rightarrow \quad w=nt \quad , \quad dw=n\,dt.$$

$$\therefore E(W^k)=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^1 (nt)^k t^{r-1}(1-t)^{n-r}dw$$

$$=\frac{n!\,n^k}{(r-1)!(n-r)!}\int_0^1 t^{k+r-1}(1-t)^{n-r}dw$$

$$=\frac{n!\,n^k}{(r-1)!(n-r)!}\,\frac{(k+r-1)!(n-r)!}{(n+k)!}$$

$$=n^k\frac{n!(k+r-1)!}{(r-1)!(n+k)!}.$$

وهي نفسها عزوم W'، وبوضع $k=1,2,3,4$ نحصل على :

$$k=1 \quad \Rightarrow \quad E(W)=\frac{nr}{(n+1)},$$

$$k=2 \quad \Rightarrow \quad E(W^2)=n^2\frac{r(r+1)}{(n+1)(n+2)},$$

$$k=3 \quad \Rightarrow \quad E(W^3)=n^3\frac{r(r+1)(r+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)},$$

$$k=4 \quad \Rightarrow \quad E(W^4)=n^4\frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

كما يمكن إيجاد توزيع تقريبي لـ W' و W عندما تكون n كبيرة كالتالي:

$$g(w)=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}\left(\frac{w}{n}\right)^{r-1}\left(1-\frac{w}{n}\right)^{n-r}$$

$$=\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{(r-1)!\,n^{r-1}}w^{r-1}\left(1-\frac{w}{n}\right)^{-r}\left(1-\frac{w}{n}\right)^{n}.$$

$$\therefore g(w)=\frac{1}{(r-1)!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-(r-1)}{n}\right)w^{r-1}\left(1-\frac{w}{n}\right)^{-r}\left(1-\frac{w}{n}\right)^{n}.$$

وبأخذ النهاية للطرفين عندما $n\to\infty$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} g(w)=\frac{1}{(r-1)!}w^{r-1}e^{-w}.$$

حيث :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{w}{n}\right)^{-r}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{w}{n}\right)^{n}=e^{-w}.$$

أي أن المتغيران W و W' يتبعان تقريباً توزيع جاما بالمعالم $k=r,\theta=1$.

كذلك يمكن إيجاد العزوم المشتركة لـــ W',W ، ونبدأ بإيجاد دالة كثافة الاحتمال المشتركة لهما من دالة كثافة الاحتمال المشتركة للإحصاءين Y_r ، Y_{n-r+1} حيث:

$$g_{r,n-r+1}(x,y)=Cf(x)f(y)[F(x)]^{r-1}[F(y)-F(x)]^{n-2r}[1-F(y)]^{r-1}$$
$$,\quad -\infty<x<y<\infty.$$

حيث :

$C=\dfrac{n!}{[(r-1)!]^2(n-2r)!}$ ، وباستخدام التحويل:

$$w=nF(x)\quad,\quad w'=n[1-F(y)].$$

وجاكوبيان التحويل هو:

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial x}{\partial w'}\\ \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w'}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{nf(x)} & 0\\ 0 & \frac{-1}{nf(y)}\end{vmatrix}=\frac{-1}{n^2f(x)f(y)},$$

ومنه دالة الكثافة المشتركة لـــ W',W هي:

$$g(w,w')=\frac{C}{n^2}\left(\frac{w}{n}\right)^{r-1}\left(\frac{w'}{n}\right)^{r-1}\left[1-\frac{w+w'}{n}\right]^{n-2r}$$
$$,\quad 0<w,w',w+w'<n.$$

ومنها يمكن حساب العزوم المشتركة كالتالي:

$$E\left[W^k(W')^s\right]=\frac{C}{n^2}\int_0^n\int_0^{n-w'}w^k(w')^s\left(\frac{w}{n}\right)^{r-1}\left(\frac{w'}{n}\right)^{r-1}\left[1-\frac{w+w'}{n}\right]^{n-2r}dw\,dw'.$$

وبالتعويض:

$$z=\frac{w}{n} \quad , \quad t=\frac{w'}{n},$$

$$dz=\frac{dw}{n} \quad , \quad dt=\frac{dw'}{n}.$$

$$\therefore E\left[W^k(W')^s\right] = Cn^{k+s}\int_0^1\int_0^{1-t} z^{k+r-1}t^{s+r-1}(1-t-z)^{n-2r}dz\,dt$$

$$=Cn^{k+s}\int_0^1\int_0^{1-t} z^{k+r-1}t^{s+r-1}\sum_{j=1}^{n-2r}\binom{n-2r}{j}(-1)^j(1-t)^{n-2r-j}z^j\,dz\,dt$$

$$=Cn^{k+s}\sum_{j=0}^{n-2r}\binom{n-2r}{j}(-1)^j\int_0^1 t^{s+r-1}(1-t)^{n-2r-j}\int_0^{1-t} z^{k+r+j-1}dz\,dt$$

$$=Cn^{k+s}\sum_{j=0}^{n-2r}\binom{n-2r}{j}(-1)^j\int_0^1 t^{s+r-1}(1-t)^{n-2r-j}\frac{(1-t)^{k+r+j}}{k+r+j}dt$$

$$=Cn^{k+s}\sum_{j=0}^{n-2r}\binom{n-2r}{j}(-1)^j\frac{1}{k+r+j}\int_0^1 t^{s+r-1}(1-t)^{n-r+k}dt$$

$$=Cn^{k+s}\sum_{j=0}^{n-2r}\binom{n-2r}{j}(-1)^j\frac{1}{k+r+j}\int_0^1 t^{s+r-1}(1-t)^{n-r+k}dt$$

$$=Cn^{k+s}B(s+r,n-r+k+1)\sum_{j=0}^{n-2r}\binom{n-2r}{j}\frac{(-1)^j}{k+r+j}$$

$$=Cn^{k+s}B(s+r,n-r+k+1)\sum_{j=0}^{n-2r}\binom{n-2r}{j}(-1)^j\int_0^1 x^{k+r+j-1}dx$$

$$=Cn^{k+s}B(s+r,n-r+k+1)\int_0^1 x^{k+r-1}\sum_{j=0}^{n-2r}\binom{n-2r}{j}(-1)^j x^j\,dx$$

$$=Cn^{k+s}B(s+r,n-r+k+1)\int_0^1 x^{k+r-1}(1-x)^{n-2r}dx$$

$$=Cn^{k+s}B(s+r,n-r+k+1)\beta(k+r,n-2r+1).$$

وكحالة خاصة عندما $k=s=1$ فإن:

$$E(WW')=\frac{r^2n^2}{(n+1)(n+2)}.$$

وتكمن أهمية المتغيرات W',W في أنه من السهل حساب عزومهما ويمكن استخدامها في حساب عزوم الإحصاءات الترتيبية كما في المثال التالي:

مثال (٣-٦-١):

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية من الحجم n سحبت من مجتمع له دالة كثافة الاحتمال:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2a} \quad , \quad -a < x < a, \\ &= 0 \quad , \quad \text{e.w.} \end{aligned}$$

ومنها يمكن حساب دالة التوزيع:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \quad , \quad x \le -a, \\ &= \frac{x}{2a} + \frac{1}{2} \quad , \quad -a < x < a, \\ &= 1 \quad , \quad x \ge a. \end{aligned}$$

ولنفرض أن :

$$W = nF(Y_r) \Rightarrow \quad W = n\left(\frac{Y_r}{2a} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Y_r = a\left(\frac{2W}{n} - 1\right).$$

ومنها نوجد عزوم الإحصاء Y_r كالتالي:

$$\begin{aligned} E(Y_r) &= a\left(\frac{2E(W)}{n} - 1\right) \\ &= a\left(\frac{2}{n}\frac{nr}{(n+1)} - 1\right) \\ &= a\left(\frac{2r}{(n+1)} - 1\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y_r^2) &= a^2 E\left(\frac{2W}{n} - 1\right)^2 \\ &= a^2 E\left(\frac{4W^2}{n^2} - \frac{4W}{n} + 1\right) \\ &= a^2\left(\frac{4E(W^2)}{n^2} - \frac{4E(W)}{n} + 1\right) \\ &= a^2\left(\frac{4}{n^2}\frac{n^2 r(r+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{4}{n}\frac{nr}{(n+1)} + 1\right) \\ &= a^2\left(\frac{4r(r+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{4r}{(n+1)} + 1\right). \end{aligned}$$

وبالمثل يمكن حساب:

$$E(Y_r^3)=a^3\left(\frac{8r(r+1)(r+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\frac{12r(r+1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{6r}{(n+1)}-1\right),$$

$$E(Y_r^4)=a^4\left(\frac{16r(r+1)(r+2)(r+3)}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}-\frac{32r(r+1)(r+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)},\right.$$

$$\left.+\frac{24r(r+1)}{(n+1)(n+2)}-\frac{8r}{(n+1)}+1\right)$$

وكحالة خاصة عندما $r=n$ فإن:

$$\mu_1'=E(Y_n)=a\left(\frac{n-1}{n+1}\right),$$

$$\mu_2'=E(Y_n^2)=a^2\left(\frac{n^2-n+2}{(n+1)(n+2)}\right),$$

$$\mu_3'=E(Y_n^3)=a^3\left(\frac{n^3+12n^2-14n-3}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right),$$

$$\mu_4'=E(Y_n^4)=a^4\left(\frac{360-114n-59n^2-18n^3-n^4}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\right).$$

ويمكن حساب العزوم حول المتوسط من العلاقة بينها وبين العزوم حول الصفر ومن ثم نوجد منها معامل الالتواء والتفلطح.

(٣-٧) علاقة عامة لعزوم الإحصاءات الترتيبية:

ليكن:

$$\nu_k\left(Y_r\,|\,n\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\,h_r(x|n)\,dx$$ حيث:

$$h_r(x|n)=f(x)[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r}.$$

وعلى ذلك فإن:

$$\nu_k\left(Y_r|n-1\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r-1}\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{n-r-1}[F(x)+1-F(x)]^t\,dx.$$

وبوضع $t=1$ نحصل على العلاقة:

$$\nu_k\left(Y_r|n-1\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)\left[F(x)\right]^r\left[1-F(x)\right]^{n-r-1}dx$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)\left[F(x)\right]^{r-1}\left[1-F(x)\right]^{n-r}dx,$$
$$\nu_k\left(Y_r|n-1\right)=\nu_k\left(Y_{r+1}|n\right)+\nu_k\left(Y_r|n\right).$$

وبوضع $t=2$ فإن:

$$\nu_k\left(Y_r|n-1\right)=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)\left[F(x)\right]^{r+1}\left[1-F(x)\right]^{n-r-1}dx$$
$$+2\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)\left[F(x)\right]^{r}\left[1-F(x)\right]^{n-r}dx$$
$$+\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)\left[F(x)\right]^{r-1}\left[1-F(x)\right]^{n-r+1}dx$$
$$\nu_k\left(Y_r|n-1\right)=\nu_k\left(Y_{r+2}|n+1\right)+2\nu_k\left(Y_{r+1}|n+1\right)+\nu_k\left(Y_r|n+1\right),$$

ويمكن استخدام العلاقات السابقة لإيجاد علاقة بين عزوم الإحصاءات الترتيبية حيث إن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء Y_r هي:

$$g_r(x)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}h_r(x|n)$$
$$\therefore \mu'_k\left(Y_r|n\right)=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\nu_k\left(Y_r|n\right)$$
$$=\frac{1}{B(r,n-r+1)}\nu_k\left(Y_r|n\right).$$

وبالتالي نحصل على العلاقة:

$$B(r,n-r)\mu'_k(Y_r|n-1)$$
$$=B(r+1,n-r)\mu'_k\left(Y_{r+1}|n\right)+B(r,n-r+1)\mu'_k\left(Y_r|n\right).$$

وبالمثل يمكن إيجاد العلاقة بين العزوم المشتركة بتعريف:

$$\nu_{k,m}\left(Y_r,Y_s|n)\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y}x^k y^m f(x)f(y)\left[F(x)\right]^{r-1}$$
$$\left[F(y)-F(x)\right]^{s-r-1}\left[1-F(y)\right]^{n-s}dx\,dy.$$

وبضرب الطرف الأيمن بالمقدار:

$$\left[F(x)+\left(F(y)-F(x)\right)+\left(1-F(y)\right)\right]^t.$$

وعندما $t=1$ سنحصل على:

$$\nu_{k,m}\left(Y_r, Y_s \middle| n\right) = \nu_{k,m}\left(Y_{r+1}, Y_{s+1} \middle| n+1\right) + \nu_{k,m}\left(Y_r, Y_{s+1} \middle| n+1\right) + \nu_{k,m}\left(Y_r, Y_s \middle| n+1\right),$$

وبما أن:

$$E\left(Y_r^k\ Y_s^m\right) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!}\nu_{k,m}(Y_r, Y_s)$$

فإن:

$$\nu_{k,m}\left(Y_r, Y_s \middle| n\right) = B(r, s-r, n-s+1)\mu'_{k,m}\left(Y_r, Y_s \middle| n\right).$$

حيث:

$$B(a,b,c) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)}.$$

(٣-٨) القيمة المتوقعة للاحصاء الترتيبي من الرتبة r في عينة من الحجم m حيث $n \ge m$:

$$E\left(Y_r \middle| m\right) = r\binom{m}{r}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{m-r}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, r\binom{m}{r} f(x)[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{m-r}\left\{F(x)+[1-F(x)]\right\}^{n-m} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, r\binom{m}{r} f(x)[F(x)]^{r-1}[1-F(x)]^{m-r} \cdot \sum_{i=0}^{n-m}\frac{(n-m)!}{(n-m-i)!\, i!}[F(x)]^{i}[1-F(x)]^{n-m-i}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\sum_{i=0}^{n-m}\frac{(n-r-i)!}{(m-r)!(n-m-i)!}\cdot\frac{(r+i-1)!}{i!(r-1)!}\cdot\frac{n!}{(r+i-1)!(n-r-i)!} \cdot\frac{m!(n-m)!}{n!}[F(x)]^{r+i-1}[1-F(x)]^{n-r-i}\, dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-m}\frac{\binom{n-r-i}{m-r}\binom{r+i-1}{i}}{\binom{n}{m}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n!}{(r+i-1)!(n-r-i)!}x\,f(x)$$

$$\cdot[F(x)]^{r+i-1}[1-F(x)]^{n-r-i}\,dx$$

$$=\sum_{i=0}^{n-m}\frac{\binom{n-r-i}{m-r}\binom{r+i-1}{i}}{\binom{n}{m}}E\left(Y_{r+i}|n\right)\ ,n\geq m$$

(٣-٩)العلاقات التكرارية بين القيم المتوقعة لبعض الدوال في الإحصاءات الترتيبية:

من نظرية(١-٧-١) أثبتنا العلاقة التكرارية التالية:

$$g_{r+1,n}(x)=\frac{n}{r}g_{r,n-1}(x)-\frac{n-r}{r}g_{r,n}(x).$$

بضرب كلا الطرفين بالدالة المعطاة في x، ولتكن $\varphi(x)$ واخذ التكامل على كل قيم x، فإننا نصل إلى العلاقة التالية بين القيم المتوقعة للدوال $\varphi\left(Y_{r+1}|n\right)$, $\varphi\left(Y_r|n-1\right)$, $\varphi\left(Y_r|n\right)$:

$$E\left[\varphi\left(Y_{r+1}|n\right)\right]=\frac{n}{r}E\left[\varphi\left(Y_r|n-1\right)\right]-\frac{n-r}{r}\left[\varphi\left(Y_r|n\right)\right].$$

العلاقة التكرارية السابقة تعطي القيمة المتوقعة لدالة معطاة في الإحصاء الترتيبي من الرتبة $r+1$ في عينة عشوائية من الحجم n بدلالة القيم المتوقعة لنفس الدالة في الإحصاء الترتيبي من الرتبة r في عينات عشوائية من الحجم n و $n-1$.

وكحالة خاصة عندما $\varphi(x)=x^k$ فإننا نحصل على:

$$E\left[\varphi\left(Y_{r+1}^k|n\right)\right]=\frac{n}{r}E\left[\varphi\left(Y_r^k|n-1\right)\right]-\frac{n-r}{r}\left[\varphi\left(Y_r^k|n\right)\right].$$

(٣-١٠) التحقق من المتوسطات لأصغر الاحصاءات الترتيبية في عينات من الحجم n مختارة من توزيع متماثل:

بما أن التوزيع المختار منه العينة متماثل، فإن $F(x)$ يمكن كتابتها كالتالي:

$$F(x)=\tfrac{1}{2}+g(x),$$

$$1-F(x)=\tfrac{1}{2}-g(x)$$

وعلى ذلك:

$$F(x)[1-F(x)]=\tfrac{1}{4}-[g(x)]^2$$

وهذا يعني أن $F(x)[1-F(x)]$ دالة زوجية وعلى ذلك:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\{F(x)[1-F(x)]\}^{n-1} f(x)\,dx=0.$$

وبالتالي فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\{1-[1-F(x)]\}^{n-1}[1-F(x)]^{n-1} f(x)\,dx=0.$$

أو يمكن كتابته بالصورة

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\{1-[1-F(x)]\}^{n-1}[1-F(x)]^{n-1} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}[1-F(x)]^j[1-F(x)]^{n-1} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}[1-F(x)]^{n+j-1} f(x)\,dx$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}\int_{-\infty}^{\infty} x[1-F(x)]^{n+j-1} f(x)\,dx=0.$$

ولكن لعينات من الحجم n فإن دالة كثافة الاحتمال لأصغر الإحصاءات الترتيبية هي:

$$g_1(x)=n[1-F(x)]^{n-1} f(x),$$

$$E(Y_1|n)=n\int_{-\infty}^{\infty} x[1-F(x)]^{n-1} f(x)dx.$$

$$\therefore E(Y_1|n+j)=(n+j)\int_{-\infty}^{\infty} x[1-F(x)]^{n+j-1} f(x)dx$$

$$=\mu_1'(Y_1|n+j).$$

$$\therefore \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}\int_{-\infty}^{\infty} x[1-F(x)]^{n+j-1} f(x)\,dx$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\binom{n-1}{j}\frac{1}{(n+j)}\mu_1'(Y_1|n+j)=0.$$

وهذا يعني أن:

$$\frac{1}{n}\mu_1'\left(Y_1|n\right)-\frac{n-1}{n+1}\mu_1'\left(Y_1|n+1\right)+\cdots+\frac{1}{2n-1}\mu_1'\left(Y_1|2n-1\right)=0.$$

والذي يعطي تحقق من المتوسطات لأصغر الإحصاءات الترتيبية في عينات مختارة من توزيع متماثل.

(٣-١١) العزوم التقريبية للإحصاءات الترتيبية للعينات الكبيرة:

إن تقدير العزوم المضبوطة للإحصاء الترتيبي Y_r مباشرة من دالة كثافة الاحتمال يتطلب تحليل عددي للتكاملات لكثير من $F(x)$ والتي لها أهمية في التطبيقات. يعتبر الإحصاء الترتيبي من الرتبة r دالة في الترتيب الإحصائي من توزيع منتظم وذلك من نظرية التحويل التكاملي.

بفرض أن $U_{(r)}$ هي الإحصاء الترتيبي من توزيع منتظم في الفترة $(0,1)$. العلاقة بين $U_{(r)}, Y_r$ تأخذ الشكل التالي:

$$U_{(r)}=F(Y_r).$$

وعلى ذلك:

$$Y_r=F^{-1}(U_{(r)})=g(U_{(r)}).$$

ومن السهل الحصول على العزوم للإحصاء $U_{(r)}$. وبالتالي يمكن الحصول على عزوم الإحصاء Y_r كالتالي:

$$E(Y_r)=E\left(F^{-1}(U_{(r)})\right)=E\left(g(U_{(r)})\right).$$

ولنفرض إن $\mu=E(U_r)$ وسنستخدم مفكوك تايلور للدالة $g(z)$ حول μ وهو:

$$g(z)=g(\mu)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(z-\mu)^i}{i!}g^{(i)}(\mu),$$

حيث:

$$g^{(i)}(\mu)=\left.\frac{d^i g(z)}{dz^i}\right|_{z=\mu}$$

وهذه المتسلسلة تقاربية عندما:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(z-\mu)^n}{n!}g^{(i)}(z_1)=0 \quad , \quad \mu<z_1<z.$$

وبكتابة الدالة $g(z)$ لأي متغير عشوائي Z له متوسط μ، وبأخذ التوقع نحصل على:

$$E\left(g(Z)\right)=g(\mu)+\frac{1}{2}\operatorname{Var}(Z)g''(\mu)+\sum_{i=3}^{\infty}\frac{E(Z-\mu)^i}{i!}g^{(i)}(\mu).$$

ومن النتيجة السابقة يمكننا الحصول على تقريبان لـ $E\left(g(Z)\right)$ وهما:

$$(1)\quad E\big(g(Z)\big) \approx g(\mu),$$

$$(2)\quad E\big(g(Z)\big) \approx g(\mu) + \frac{1}{2}\operatorname{Var}(Z) g''(\mu).$$

وبطرح$E\big(g(Z)\big)$ من $g(Z)$ ثم التربيع وأخذ التوقع سنحصل على تقريب للتباين كالتالي:

$$(3)\quad E\big[g(Z) - E\big(g(Z)\big)\big]^2 \approx \operatorname{Var}(Z)\big(g'(\mu)\big)^2.$$

وإذا وضعنا $Z = U_r$ في النتائج الثلاث السابقة نحصل على:

$$(1)\quad E\big(g(U_r)\big) \approx g(E(U_r)),$$

$$(2)\quad E\big(g(U_r)\big) \approx g(E(U_r)) + \frac{1}{2}\operatorname{Var}(U_r) g''(E(U_r)),$$

$$(3)\quad E\big[g(U_r) - E\big(g(U_r)\big)\big]^2 \approx \operatorname{Var}(U_r)\big(g'(E(U_r))\big)^2.$$

وقد علمنا سابقاً إن U_r متغير عشوائي يتبع توزيع بيتا وله المتوسط والتباين كالتالي:

$$E(U_r) = \frac{r}{n+1} \quad , \quad \operatorname{Var}(U_r) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

بينما:

$$\begin{aligned}
g(U_r) &= F^{-1}(U_r) = Y_r,\\
g'(U_r) &= \frac{d}{dU_r}F^{-1}(U_r)\\
&= \left(\frac{dF(Y_r)}{dY_r}\right)^{-1}\\
&= \big(f(Y_r)\big)^{-1}\\
&= \big(f(F^{-1}(U_r))\big)^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore g''(U_r) &= \frac{d}{dU_r}\big(f(Y_r)\big)^{-1}\\
&= -\big(f(Y_r)\big)^{-2} f'(Y_r)\frac{dY_r}{dU_r}\\
&= -\big(f(Y_r)\big)^{-2} f'(Y_r)\frac{d}{dU_r}\big(F^{-1}(U_r)\big)\\
&= -\big(f(Y_r)\big)^{-2} f'(Y_r)\big(f(Y_r)\big)^{-1}\\
&= -f'(Y_r)\big(f(Y_r)\big)^{-3}\\
&= -f'\big(F^{-1}(U_r)\big)\big[f\big(F^{-1}(U_r)\big)\big]^{-3}.
\end{aligned}$$

وبوضع:

$U_r = \mu = \dfrac{r}{n+1}$ نحصل على:

$$g'(\mu) = \left\{ f\left[F^{-1}\left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\}^{-1},$$

$$g''(U_r) = -\left\{ f'\left[F^{-1}\left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\} \left\{ f\left[F^{-1}\left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\}^{-3}$$

وبذلك تصبح التقريبات كالتالي:

$$(1) \quad E(Y_r) = E\big(g(U_r)\big) \approx F^{-1}\left(\frac{r}{n+1} \right),$$

$$(2) \quad E(Y_r) = E\big(g(U_r)\big) \approx F^{-1}\left(\frac{r}{n+1} \right) - \frac{r(n-r+1)}{2(n+1)^2(n+2)} \left\{ f'\left[F^{-1}\left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\} \left\{ f\left[F^{-1}\left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\}^{-3}$$

$$(3) \quad Var(Y_r) = E\big[g(U_r) - E\big(g(U_r)\big)\big]^2 \approx \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)} \left\{ f\left[F^{-1}\left(\frac{r}{n+1} \right) \right] \right\}^{-2}.$$

ويمكن أن تستخدم النتائج السابقة في تقدير التوقع والتباين للإحصاء Y_r عندما تكون f,F موضوعة في جداول مثل التوزيع الطبيعي.

مثال (٣-١١-١):

بفرض إننا نرغب في إيجاد تقريب لمتوسط وتباين الإحصاء Y_4 من عينة عشوائية حجمها $n=19$ مسحوبة من توزيع طبيعي قياسي $N(0,1)$.

الحل:

$$E(Y_4) = \Phi^{-1}\left(\frac{4}{20} \right) = \Phi^{-1}(0.2) = -0.84.$$

حيث $\Phi(.2)$ نحصل عليها من جدول التوزيع الطبيعى القياسي فى ملحق (٢).

$$\text{Var}(Y_4) \approx \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}\left\{\phi\left[\Phi^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)\right]\right\}^{-2}$$
$$= \frac{(4)(16)}{(20)^2(21)}\left\{\phi\left[\Phi^{-1}(0.2)\right]\right\}^{-2}$$
$$= \frac{(4)(16)}{(20)^2(21)}\left[\phi(-0.84)\right]^{-2}$$
$$= \frac{(4)(16)}{(20)^2(21)}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(0.84)^2}\right]^{-2}$$
$$= \frac{(4)(16)}{(20)^2(21)}\left[0.2803\right]^{-2}$$
$$\therefore \text{Var}(Y_4) \approx 0.097.$$

وبالنسبة للوسيط عندما يكون العدد $n = 2m + 1$ فردي فإن الوسيط هـو الإحـصاء التـرتيبي رقم $m + 1$ وعلى ذلك:

$$E(Y_{m+1}) \approx F^{-1}\left(\frac{m+1}{2m+1+1}\right) = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right).$$

مثال (٣-١١-٢):

إذا كانت العينة مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة احتمال

$$f(x) = \frac{b}{\theta}x^{b-1}e^{-\frac{x^b}{\theta}} \quad , \quad x > 0.$$

أوجد تقريب لتوقع الإحصاء Y_r حيث $n = 19$.

الحل:

$$E(Y_r) \approx F^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right),$$
$$\text{Var}(Y_r) \approx \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}\left\{f\left[F^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)\right]\right\}^{-2}.$$

وحيث إن:

$$U_r = F(y) = 1 - e^{-\frac{y^b}{\theta}} \Rightarrow \quad e^{-\frac{y^b}{\theta}} = 1 - U_r$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^b}{\theta} = -\ln(1 - U_r)$$

$$\Rightarrow \quad y^b = -\theta \ln(1 - U_r)$$

$$\Rightarrow \quad y = F^{-1}(U_r) = \left(-\theta \ln(1 - U_r)\right)^{\frac{1}{b}}.$$

$$E(Y_r) \approx \left(-\theta \ln\left(1 - \frac{r}{20}\right)\right)^{\frac{1}{b}},$$

$$Var(Y_r) \approx \frac{r(20-r)}{(20)^2(21)} \left\{ f\left(-\theta \ln\left(1 - \frac{r}{20}\right)\right)^{\frac{1}{b}} \right\}^{-2}.$$

$$= \frac{r(20-r)}{(20)^2(21)} \left\{ \frac{b}{\theta}\left(-\theta \ln\left(1 - \frac{r}{20}\right)\right)^{\frac{b-1}{b}} \right\}^{-2}$$

$$\left\{ Exp\left(-\frac{1}{\theta}\theta \ln\left(1 - \frac{r}{20}\right)\right) \right\}^{-2}$$

$$= \frac{r(20-r)^3}{(21)} \left\{ \frac{b}{\theta}\left(-\theta \ln\left(1 - \frac{r}{20}\right)\right)^{1-\frac{1}{b}} \right\}^{-2}.$$

الباب الرابع

التوزيع التقريبي للإحصاء الترتيبي

(٤-١) التوزيع التقريبي للإحصاء الترتيبي في حاله المجتمع المنتظم:

لما كانت دالة كثافة الاحتمال بالضبط للإحصاء الترتيبي من الرتبة r ، لإي توزيع احتمالي لـه دالة توزيع احتمالي F، يكون معقد عندما n كبيرة فإن المعلومات الخاصة بشكل التوزيع التقريبي سوف تزيد من فائدة الترتيبيات الإحصائية في التطبيق عندما تكون n كبيرة. عند الحديث عن التوزيع التقريبي، عموماً لأي r ، سوف نضع الشرط:

$$\text{as} \quad n \to \infty \quad , \quad \frac{r}{n} = p \quad \text{remained fixed.}$$

تحت هذا الشرط سوف نثبت أن توزيع الاحصاء الترتيبي القياسي من الرتبة r من توزيع منتظم يؤول إلى التوزيع الطبيعي القياسي.

بفرض أن $U_{(1)} < U_{(2)} < \cdots < U_{(n)}$ عينة مرتبة من مجتمع يتبع التوزيع المنتظم في الفترة $(0,1)$ فإن دالة كثافة الاحتمال للاحصاء الترتيبي من الرتبة r $(U_{(r)})$ هو:

$$g_r(u) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} u^{r-1}(1-u)^{n-r} \quad , \quad 0 < u < 1.$$

بفرض المتغير العشوائي:

$$Z = \frac{U_{(r)} - \mu}{\sigma},$$

حيث $U_{(r)}$ هو الاحصاء الترتيبي من الرتبة r من توزيع منتظم في الفترة $(0,1)$ حيث:

$$\mu = E\left(U_{(r)}\right) = \frac{r}{n+1},$$

$$\sigma^2 = Var\left(U_{(r)}\right) = \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

للحصول على دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z نتبع الآتي:

$$T: \quad z = \frac{u-\mu}{\sigma}$$

$$T^{-1}: \quad \sigma z + \mu = u \quad , \quad |J| = \sigma \cdot$$

$$\therefore h(z) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}(\sigma z + \mu)^{r-1}(1 - \sigma z - \mu)^{n-r}\sigma$$

$$= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\sigma\mu^{r-1}(1-\mu)^{n-r} \cdot \left(1 + \frac{\sigma z}{\mu}\right)^{r-1}\left(1 - \frac{\sigma z}{1-\mu}\right)^{n-r}.$$

ليكن:

$$e^{v}=\left(1+\frac{\sigma z}{\mu}\right)^{r-1}\left(1-\frac{\sigma z}{1-\mu}\right)^{n-r}=e^{(r-1)\ln\left(1+\frac{\sigma z}{\mu}\right)+(n-r)\ln\left(1-\frac{\sigma z}{1-\mu}\right)}.$$

حيث:

$$v=(r-1)\ln\left(1+\frac{\sigma z}{\mu}\right)+(n-r)\ln\left(1-\frac{\sigma z}{1-\mu}\right)$$

$$\therefore\quad g_r(z)=\frac{n!}{(r-1)(n-r)!}\sigma\mu^{r-1}(1-\mu)^{n-r}e^{v}.$$

الأن بإستخدام مفكوك تيلور فإن:

$$\ln(1+x)=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\frac{x^{i}}{i}=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\cdots$$

والتي تكون تقاربية عندما $-1\le x\le 1$ بوضع:

$$\frac{\sigma}{\mu}=C_1\quad,\quad\frac{\sigma}{1-\mu}=C_2$$

نحصل على:

$$\begin{aligned}v&=(r-1)\ln\left(1+\frac{\sigma z}{\mu}\right)+(n-r)\ln\left(1-\frac{\sigma z}{1-\mu}\right)\\&=(r-1)\ln(1+C_1z)+(n-r)\ln(1-C_2z)\\&=(r-1)\left(C_1z-\frac{C_1^2z^2}{2}+\frac{C_1^3z^3}{3}-\cdots\right)-(n-r)\left(C_2z+\frac{C_2^2z^2}{2}+\frac{C_2^3z^3}{3}+\cdots\right)\quad(٤\text{-}١)\\&=z\left[C_1(r-1)-C_2(n-r)\right]-\frac{z^2}{2}\left[C_1^2(r-1)+C_2^2(n-r)\right]\\&\qquad+\frac{z^3}{3}\left[C_1^3(r-1)-C_2^3(n-r)\right]\cdots\end{aligned}$$

الآن المطلوب إيجاد:

$$\lim_{n\to\infty}v\quad,\quad p=\frac{r}{n}.$$

يمكن تقريب C_1,C_2 بدلالة بمتوسط وتباين متغير عشوائي يتبع توزيع بيتا بمعا لم n,r كالتالي:

$$C_1=\frac{\sigma}{\mu}=\sqrt{\frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}\cdot\frac{(n+1)^2}{r^2}}.$$

$$\therefore C_1 = \frac{(n-r+1)^{\frac{1}{2}}}{[r(n+2)]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{n}{n}-\frac{r}{n}+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{r}{n}(n+2)\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{np}} \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

وذلك لأن:

$$\frac{r}{n} = p \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

وبما أن:

$$\mu = \frac{r}{n+1},$$

$$\therefore 1-\mu = 1-\frac{r}{n+1}$$

$$= \frac{n+1-r}{n+1}.$$

$$\therefore C_2 = \frac{\sigma}{1-\mu} = \sqrt{\frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n-r+1)^2}}$$

$$= \frac{r^{\frac{1}{2}}}{[(n+2)(n-r+1)]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{r}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[(n+2)\left(\frac{n}{n}-\frac{r}{n}+\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\therefore C_2 \approx \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

بالتعويض عن هذه القيم في (١٠٤) يمكن الحصول على معاملات z كالتالي:

$$(r-1)\frac{\sqrt{(1-p)}}{\sqrt{n\,p}} - \frac{(n-r)\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}} = \frac{(n\,p-1)\sqrt{1-p}}{\sqrt{n\,p}} - \frac{(n-np)\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}$$

$$= \frac{(n\,p-1)\sqrt{1-p}}{\sqrt{n\,p}} - \frac{n(1-p)\sqrt{p}}{\sqrt{n(1-p)}}$$

$$= \frac{(n\,p-1)\sqrt{1-p}}{\sqrt{n\,p}} - \sqrt{n\,p}\,\sqrt{(1-p)}$$

$$= \sqrt{1-p}\left[\frac{n\,p-1-n\,p}{\sqrt{n\,p}}\right]$$

$$= \frac{-\sqrt{1-p}}{\sqrt{n\,p}} \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

معاملات $-\frac{z^2}{2}$ في (١٠٤) يمكن الحصول عليها كالتالي:

$$\frac{(r-1)(1-p)}{n\,p} + \frac{(n-r)p}{n(1-p)} = \frac{(np-1)(1-p)}{np} + \frac{(n-np)p}{n(1-p)}$$

$$= \frac{(np-1)(1-p)}{np} + \frac{n(1-p)p}{n(1-p)}$$

$$= \frac{np(1-p)-(1-p)}{np} + p$$

$$= (1-p) - \frac{1-p}{np} + p$$

$$= 1 - \frac{1-p}{np} \to 1 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

ومعاملات $-\frac{z^3}{3}$ في (١٠٤) يمكن الحصول عليها كالتالي:

$$\frac{(r-1)(1-p)^{\frac{3}{2}}}{(np)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(n-r)p^{\frac{3}{2}}}{[n(1-p)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{(np-1)(1-p)^{\frac{3}{2}}}{(np)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(n-np)p^{\frac{3}{2}}}{[n(1-p)]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{(np-1)\sqrt{(1-p)^3}}{(np)^{\frac{3}{2}}} - \frac{n(1-p)\sqrt{p^3}}{\sqrt{n^3(1-p)^3}}$$

$$= \frac{(np-1)}{n^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{p^{\frac{3}{2}}}{[n(1-p)]^{\frac{1}{2}}} \to 0$$

$$\text{as} \quad n \to \infty$$

وبالتعويض عن هذه القيم في (١٠٤) وإهمال الحدود من الرتبة $n^{-\frac{1}{2}}$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} v = \frac{-z^2}{2},$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} e^v = e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

لإيجاد القيمة للثابت في (١٠٤) عندما $n \to \infty$ لابد من استخدام صيغة استرلنج Stirling's وهي:

$$K! \approx \sqrt{2\pi}\ e^{-K}\ K^{K+\frac{1}{2}}$$

$$\because \sigma\mu^{r-1}(1-\mu)^{n-r} = \sqrt{\frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}} \cdot \left(\frac{r}{n+1}\right)^{r-1}\left(1-\frac{r}{n+1}\right)^{n-r}$$

$$= \frac{r^{r-.5}(n-r+1)^{n-r+\frac{1}{2}}}{(n+1)^n (n+2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\approx \frac{r^{r-.5}(n-r+1)^{n-r+.5}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

وعلى ذلك فإن الجزء الثابت في (١٠٤) عندما $n \to \infty$ يكتب كالتالي:

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}\sigma\mu^{r-1}(1-\mu)^{n-r} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} \cdot \frac{r(n-r+1)}{n+1} \cdot \sigma\mu^{r-1}(1-\mu)^{n-r}$$

$$\approx \frac{\sqrt{2\pi}\ e^{-(n+1)}(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{2\pi\ e^{-r} r^{r+\frac{1}{2}} e^{-(n-r+1)}(n-r+1)^{n-r+\frac{3}{2}}}$$

$$\cdot \frac{r^{r+\frac{1}{2}}(n-r+1)^{n-r+\frac{3}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} h_r(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}},$$

اذن $Z \sim N(0,1)$ وذلك عندما $n \to \infty$ وبما أن:

$$Z = \frac{U_{(r)} - \mu}{\sigma}$$

فإن:

$U_{(r)} \sim N(\mu, \sigma^2)$ وذلك عندما $n \to \infty$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} P\left(U_{(r)} \le t\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right).$$

أي أن دالة التوزيع التجميعي للمتغير $U_{(r)}$ عندما $n \to \infty$ هي:

$$\begin{aligned} F_{r:n}(t) &= P\left(U_{(r)} \le t\right) \\ &= \int_{-\infty}^{t} g_r(u)\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} h(z)\,dz \\ &= \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

(٤-٢) التوزيع التقريبي لوسيط العينة في حالة المجتمع المنتظم:

في هذا البند وتحت فرض التوزيع المنتظم على الفترة $(0,1)$ سوف نوجد توزيعاً تقريبياً لوسيط العينة عندما يكون حجم العينة كبيراً. إذا كانت $U_{(1)} < U_{(2)} < \cdots < U_{(n)}$ عينة مرتبة من مجتمع يتبع توزيع منتظم علي الفترة $(0,1)$ وكانت $n = 2m+1$، n فردية فإن دالة الكثافة الاحتمالية للوسيط $U_{(m+1)}$ هي:

$$g_{m+1}(u) = \frac{(2m+1)!}{m!\,m!} u^m (1-u)^m \quad , \quad 0 < u < 1,$$

$$\because E\left(U_{(r)}\right) = \frac{r}{n+1}.$$

بوضع $r = m+1$, $n = 2m+1$. أذن:

$$E\left(U_{(m+1)}\right)=\frac{m+1}{2m+2}=\frac{m+1}{2(m+1)}=\frac{1}{2}.$$

$$\because \operatorname{Var}\left(U_{(r)}\right)=\frac{r(n-r+1)}{(n+2)(n+1)^2}$$

بوضع $n=2m+1\,, r=m+1$. أذن :

$$\operatorname{Var}\left(U_{(m+1)}\right)=\frac{1}{4(2m+3)}\approx\frac{1}{4n}.$$

نظرية (٤-٢-١):

اذا كانت:

$$Z=\frac{U-E(U)}{\sqrt{\operatorname{Var}(U)}}=\left(U-\frac{1}{2}\right)2\sqrt{n}\quad, U=U_{(m+1)}$$

فإن Z تقريبا يتبع توزيع طبيعي قياسي.

البرهان:

سوف نستخدم دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير U لإيجاد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير Z.

وبإستخدام التحويلة:

$$T: z=\left(u-\frac{1}{2}\right)2\sqrt{n}$$

$$\therefore T^{-1}:\left(\frac{z}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\right)=u$$

$$\therefore \frac{dz}{2\sqrt{n}}=du.$$

$$\therefore w(z)=\frac{(2m+1)!}{m!\,m!}\cdot\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{2\sqrt{n}}\right)^m\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{2\sqrt{n}}\right)^m$$

$$=\frac{(2m+1)!}{m!m!}\cdot\frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{4^m}\cdot\left(1-\frac{z^2}{n}\right)^m.$$

وحيث أن n كبيرة فيمكن اعتبار $n=2m$ كما يمكن إستخدام صيغة استرلنج حيث:

$$K!=\sqrt{2\pi}\,e^{-K}K^{K+\frac{1}{2}},$$

وبذلك يمكن كتابة $w(z)$ علي الصورة:

$$w(z)=\frac{\sqrt{2\pi}\,e^{-(2m+1)}(2m+1)^{2m+1+\frac{1}{2}}}{\left(\sqrt{2\pi}\,e^{-m}m^{m+\frac{1}{2}}\right)^2.2\sqrt{2m}\cdot2^{2m}}\cdot\left(1-\frac{z^2}{2m}\right)^m$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{z_{/2}^{2}}{m}\right)^{m}.$$

وعندما تكون n أي m كبيرة فإن:

$$w(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

أي أن Z تتبع تقريبا توزيع طبيعى قياسى وعلى ذلك $U \sim N\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4n}\right)$ عندما $n \to \infty$

(٤-٣) التوزيع التقريبي للاحصاء الترتيبي من الرتبة r لأى توزيع احتمالي:

إذا كان Y_r هو الاحصاء الترتيبي لأي توزيع احتمالي له دالة توزيع $F(x)$ فإن النظرية التالية تعطي التوزيع التقريبي للاحصاء الترتيبي Y_r، وذلك بالاعتماد على نظرية التحويل التكاملي في الحصول على المتوسط والتباين التقريبي المناسبين وهما:

$$\mu = E(Y_r) \approx F^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right),$$

$$\sigma^2 = Var(Y_r) \approx \frac{r(n-r+1)}{(n+1)^2(n+2)}\left\{f\left[F^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right)\right]\right\}^{-2}.$$

تحت فرض أن $\frac{r}{n}=p$ و n كبيرة فيمكن وضع:

$$\mu = F^{-1}(p),$$

$$\sigma = \frac{p^{\frac{1}{2}}(1-p)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}[f(\mu)]^{-1}.$$

نظرية (٤-٢-٢):

اذا كان Y_r يمثل الإحصاء الترتيبى من الرتبة r للعينة العشوائية $X_1, X_2, \cdots, X_n$ والمسحوبة من توزيع احتمالي متصل له دالة توزيع تجميعي $F(x)$ فإنه عندما n تؤول إلى ما لانهاية و $\frac{r}{n}$ تظل ثابتة، فإن توزيع:

$$Z=(Y_r-\mu)f(\mu)\left[\frac{n}{p(1-p)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

يؤول إلى التوزيع الطبيعي القياسي حيث μ تحقق الشرط أن $F(\mu)=p$ و $p=\frac{r}{n}$. وعلى ذلـــك Y_r تؤول الى التوزيع الطبيعى بمتوسط μ وتباين σ^2 . اي أن:

$$Y_r \sim N(\mu,\sigma^2)$$

التوزيع التقريبي لوسيط العينة:

التوزيع التقريبي لوسيط العينة أو الاحصاء الترتيبى Y_{m+1} حيث n فردية يحسب كالتالي:

$$\because E(Y_r) \approx F^{-1}\left(\frac{r}{n+1}\right),$$

بوضع $n=2m+1\,,\, r=m+1$ فإن:

$$E(Y_{m+1})=F^{-1}\left(\frac{m+1}{2m+2}\right)$$

$$=F^{-1}\left(\frac{m+1}{2(m+1)}\right)=F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\nu,$$

$$\because Var(Y_r)=\frac{r(n-r+1)}{(n+2)(n+1)^2}\left[f(\nu)\right]^{-2}$$

$$\therefore Var(Y_{m+1})=\frac{\left[f(\nu)\right]^{-2}}{4(n+2)} \approx \frac{\left[f(\nu)\right]^{-2}}{4n}.$$

من نظرية (٤-٢-٢) وكحالة خاصة عندما $r=m+1$ فإن:

$$Z=\frac{Y_{m+1}-\nu}{\sqrt{\frac{1}{4n\left[f(\nu)\right]^2}}} \sim N(0,1),$$

$$\therefore Y_{m+1} \sim N\left(\nu,\frac{1}{4n\left[f(\nu)\right]^2}\right).$$

وهذا يعني أن وسيط العينه Y_{m+1} مقدر غير متحيز لوسيط المجتمع ν .

برهان أخر:

بفرض عينة مرتبة من الحجم $n=2m+1$ و n فردية ومختارة من مجتمع بدلالة دالة كثافة احتمال $f(x)$ ووسيط ν (وبالمثل $F(\nu)=\frac{1}{2}$) والذي يفترض انه وحيد. بفرض أن وسيط العينة هو الإحصاء الترتيبي من الرتبة $m+1$ بدالة كثافة احتمال:

$$g_{m+1}(x)=\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}[F(x)]^m[1-F(x)]^m f(x).$$

ليكن:

$$\begin{aligned} y &= 2\sqrt{2m+1}\, f(\nu)\cdot(x-\nu) \\ &= c(x-\nu) \end{aligned}$$

اذن:

$$h(y)=\frac{(2m+1)!}{(m!)^2}2^m\left[F\left(\nu+\frac{y}{c}\right)\right]^m 2^m\left[1-F\left(\nu+\frac{y}{c}\right)\right]^m f\left(\nu+\frac{y}{c}\right)\frac{2^{-2m}}{c}$$

بإستخدام تقريب استرلنج فإن:

$$\frac{(2m+1)!}{(m!)^2\sqrt{2m+1}\,2^{2m+1}} \;\to\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{as} \quad m\to\infty,$$

حيث:

$$m!\sim\sqrt{2\pi}\,e^{-m}m^{m+\frac{1}{2}}$$

ايضا:

$$\frac{f\left(\nu+\frac{y}{c}\right)}{f(\nu)}\to 1 \quad \text{as} \quad m\to\infty,$$

وذلك لإي ثابت y .

بإستخدام مفكوك تايلور فإن:

$$\begin{aligned} F\left(\nu+\frac{y}{c}\right) &= F(\nu)+\frac{y}{c}F'(\nu)+\frac{1}{2}\frac{y^2}{c^2}f'(\nu)+o\left(\frac{1}{m}\right) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{y}{c}f(\nu)+\frac{1}{2}\frac{y^2}{c^2}f'(\nu)+o\left(\frac{1}{m}\right) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{y}{2\sqrt{2m+1}}+\frac{y^2}{8(2m+1)}\left\{\frac{f'(\nu)}{f^2(\nu)}\right\}+o\left(\frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore 2F\left(\nu+\frac{y}{c}\right)=1-\frac{y}{\sqrt{2m+1}}+\frac{y^2}{4(2m+1)}\left\{\frac{f'(\nu)}{f^2(\nu)}\right\}+o\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$2\left[1-F\left(\nu+\frac{y}{c}\right)\right]=1-\frac{y}{\sqrt{2m+1}}-\frac{y^2}{4(2m+1)}\left\{\frac{f'(\nu)}{f^2(\nu)}\right\}+o\left(\frac{1}{m}\right)$$

ليكن:

$$e^v=\left\{2F\left(\nu+\frac{y}{c}\right)\cdot 2\left[1-F\left(\nu+\frac{y}{c}\right)\right]\right\}^m$$

$$= 2^m\left[F\left(\nu+\frac{y}{c}\right)\right]^m 2^m\left[1-F\left(\nu+\frac{y}{c}\right)\right]^m$$

حيث:

$$m\log\left\{2F\left(\nu+\frac{y}{c}\right)\right\}+m\log\left\{2\left[1-F\left(\nu+\frac{y}{c}\right)\right]\right\}$$

$$= m\log\left[1+\frac{y}{\sqrt{2m+1}}+\cdots\right]+m\log\left[1-\frac{y}{\sqrt{2m+1}}-\cdots\right]$$

$$\lim_{m\to\infty} v = -\frac{y^2}{2}$$

(m كبيرة تعني أن n كبيرة)

$$\therefore \lim_{m\to\infty} e^{-v} = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\therefore h(y) \;\to\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \text{as} \quad m\to\infty.$$

وبالمثل: $2\sqrt{2m+1}\cdot f(\nu)(y_{m+1}-\nu)$

تؤول إلى التوزيع الطبيعي القياسي عندما $n\to\infty$.

وعلى ذلك:

$$Y_{m+1} \sim N\left(\nu, \frac{1}{4n\left[f\ (\nu)\right]^2}\right)$$

حيث $n = 2m+1$ رقم فردي. وهذا يعني أن الوسيط له توزيع تقريبي بمتوسط ν وتباين $\frac{1}{4nf^2(\nu)}$

وذلك عندما $n\to\infty$. عندما تسحب العينات من مجتمع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ فإن:

$$\mu=\nu\,,\, f(\nu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$$

$$\therefore E(Y_{r+1})=\nu,$$

$$Var(Y_{r+1})=\frac{1}{4n}(2\pi\sigma^2)=\frac{\pi}{2}\frac{\sigma^2}{n}.$$

الباب الخامس

تقديرات تعتمد على الإحصاءات الترتيبية

(٥-١) مقدمة:

تهتم نظرية التقدير الإحصائي بمشكلة تقدير المعالم المجهولة لبعض دوال كثافة الاحتمال وذلك لعينات عشوائية مختارة من تلك المجتمعات. التقديرات التي تعتمد على الإحصاءات الترتيبية تمتاز بالسهولة ولكن يعاب عليها أنها لا تستفيد من كل المعلومات الموجودة في العينة.

في البنود التالية سوف نناقش مشكلة التقدير للوسط الحسابي والمدى لأشكال خاصة من المجتمعات مثل التوزيع المستطيل والتوزيع المثلث وايضا مشكلة تقدير معالم توزيع لابلاس وتوزيع كوشي.

(٥-٢) التوزيع المستطيل

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع له دالة كثافة احتمال :

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad , \quad a \le x \le b.$$

في هذا البند سوف نقدم مقدر لكل من الوسط الحسابي والمدى وذلك بطريقتين. في الطريقة الأولى سوف نعتمد على الإحصاءات الترتيبية فقط. أما في الطريقة الثانية فسوف نضيف أسلوب بييز وذلك للحصول على مقدر لكل من الوسط الحسابي والمدى.

(٥-٢-١) الطريقة الاولى (الاعتماد على الإحصاءات الترتيبية فقط):

أولا: مقدر للوسط الحسابي:

لتكن $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية للعينة العشوائية. الوسط الحسابي للمجتمع هو:

$$E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left. \frac{x^2}{2(b-a)} \right|_a^b = \frac{\left(b^2 - a^2\right)}{2(b-a)}.$$

$$\therefore \mu = \frac{a+b}{2}.$$

سوف نعتبر:

$$\mu^* = \frac{Y_r + Y_{n-r+1}}{2}$$

مقدرا لـــ μ. الآن سوف ندرس خواص هذا المقدر. لإثبات أن هذا المقدر غير متحيز لـــ μ نتبع الآتي:

ليكن:

$$W = nF(X) \quad , \quad Z = n[1 - F(Y)],$$

$$X = Y_r \quad , \quad Y = Y_{n-r+1} \ ,$$

$$E(W) = \frac{n\,r}{n+1} \quad , \quad E(Z) = \frac{n\,r}{n+1} \ ,$$

$$E(ZW) = \frac{n^2 r^2}{(n+1)(n+2)} \ ,$$

$$E(Z)^2 = E(W^2) = \frac{n^2\,r(r+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{t}{b-a}\bigg|_a^x$$

$$= \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x < b \\ 1 & x \ge b, \end{cases}$$

$$W = nF(X) \quad \Rightarrow \quad \frac{W}{n} = F(X) = \frac{X-a}{b-a}$$

$$\therefore X = \frac{W}{n}(b-a) + a.$$

$$E(X) = \frac{n\,r}{n(n+1)}(b-a) + a = a + \frac{r}{(n+1)}(b-a).$$

وبالمثل:

$$F(Y) = \frac{Y-a}{b-a} \quad \Rightarrow \quad 1 - F(Y) = \frac{b-Y}{b-a}$$

$$Z = n[1 - F(Y)] \quad \Rightarrow \quad \frac{Z}{n} = \frac{b-Y}{b-a}.$$

$$\therefore Z = \frac{n(b-Y)}{b-a} \quad \Rightarrow \quad Y = b - \frac{Z}{n}(b-a).$$

$$\therefore E(Y) = b - \frac{r\,n}{(n+1)n}(b-a)$$

$$= b - \frac{r}{n+1}(b-a).$$

$$E\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{2}[E(X) + E(Y)]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{a+\frac{r(b-a)}{(n+1)}+b-r\frac{(b-a)}{(n+1)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}[a+b].$$

إذن $\frac{Y_r + Y_{n-r+1}}{n}$ مقدرا غير متحيز للوسط الحسابى لهذا التوزيع.

الآن لإثبات أن هذا المقدر له خاصية الاتساق Consistency لابـد مـن إيجـاد التباين له.

$$Var\left(\frac{X+Y}{2}\right)=\frac{1}{4}Var(X+Y)$$

$$=\frac{1}{4}E\left[(X+Y)-E(X+Y)\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}E\left[(X+Y)-(a+b)\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}E\left[(X-a)+(Y-b)\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}E\left[(X-a)^2+(b-Y)^2+2(X-a)(Y-b)\right].$$

ليكن:

$$\therefore W=n\ F(X)=n\left(\frac{X-a}{b-a}\right) \Rightarrow \frac{W^2}{n^2}(b-a)^2=(X-a)^2$$

$$\therefore E(X-a)^2=E(W^2)\frac{(b-a)^2}{n^2}$$

$$=\frac{n^2r(r+1)(b-a)^2}{n^2(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{r(r+1)(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\because Z=\frac{n(b-Y)}{(b-a)}$$

$$\therefore \frac{Z(b-a)}{n}=(b-Y)$$

$$\therefore E(b-Y)^2 = \frac{E\left[Z^2(b-a)^2\right]}{n^2}$$

$$= \frac{n^2 r(r+1)(b-a)^2}{n^2(n+1)(n+2)} = \frac{r(r+1)(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\because (X-a)(Y-b) = -\frac{W(b-a)}{n}\frac{Z}{n}(b-a).$$

$$\therefore E\left[(X-a)(Y-b)\right] = \frac{-E\left[WZ(b-a)^2\right]}{n^2}$$

$$= \frac{-n^2 r^2 (b-a)^2}{n^2(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{-r^2(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\therefore \operatorname{Var}\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{4}E\left[(X-a)^2 + (b-Y)^2 + 2(X-a)(Y-b)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{2r(r+1)(b-a)^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{2r^2(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\frac{(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}\left(2r^2 + 2r - 2r^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{r(b-a)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

$$\text{as} \quad n \to \infty \quad \operatorname{Var}\left[\frac{(X+Y)}{2}\right] \to 0 .$$

أي أن هذا المقدر له خاصية الاتساق.

عندما $r = 1$ فإن:

$$E(\mu^*) = E\left[\frac{(Y_n + Y_1)}{2}\right] = \frac{b+a}{2},$$

$$\operatorname{Var}(\mu^*) = \frac{(b-a)^2}{2(n+1)(n+2)}.$$

وهذا يعني أن نصف المدى مقدر غير متحيز وله خاصيه الاتساق لمتوسط التوزيع .

ثانيا: مقدر للمدى:

مدى هذا التوزيع هو $(b-a)$ ، سوف نستخدم $Y_n - Y_1$ كمقدر لهذا المدى. الآن سوف ندرس خواص هذا المقدر.

$$E(Y-X)=E\left(b-\frac{Z}{n}(b-a)-\frac{W}{n}(b-a)-a\right)$$
$$=\left[(b-a)-\frac{2r(b-a)}{(n+1)}\right]$$
$$=(b-a)\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right).$$

أي أن $Y_n - Y_1$ مقدر متحيز للمدى $(b-a)$.

سوف نثبت إن المقدر $\left(\dfrac{Y-X}{1-\frac{2r}{(n+1)}}\right)=\xi$ غير متحيز للمدى.

$$E(\xi)=\left(\frac{(n+1)}{n-2r+1}\right)E(Y-X)$$
$$=\frac{n+1}{(n-2r+1)}\cdot\frac{(n-2r\ +1)}{(n\ +1)}(b-a)$$
$$=(b-a),$$

$$Var\left(\frac{(Y-X)}{1-\frac{2r}{(n+1)}}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right)^2}Var(Y-X)$$
$$=\frac{E\left[(Y-X)-E(Y-X)\right]^2}{\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right)^2}$$
$$=\frac{E\left[(b-a)\left(1-\frac{Z+W}{n}\right)-(b-a)\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right)\right]^2}{\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right)^2}$$

$$=(b-a)^2\left[E\left(1-\frac{Z+W}{n}\right)^2-2E\left(1-\frac{Z+W}{n}\right)\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right)\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right)^2\right]\Big/\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right)^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right)^2}\left[E\left(1-\frac{Z+W}{n}\right)^2-\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right)^2\right]$$

$$=\frac{(b-a)^2}{\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right)^2}\left[1-2E\left(\frac{Z+W}{n}\right)+E\left(\frac{Z+W}{n}\right)^2-\left(1-\frac{2r}{n+1}\right)^2\right]$$

$$=\frac{(b-a)^2}{\left(1-\frac{2r}{(n+1)}\right)^2}\left[1-\frac{4r}{(n+1)}+\frac{2r(r+1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{2r^2}{(n+1)(n+2)}\right.$$

$$\left.-1+\frac{4r}{(n+1)}-\frac{4r^2}{(n+1)^2}\right]$$

$$=\frac{(b-a)^2}{\left(1-\frac{2r}{n+1}\right)^2}\left[\frac{2r(r+1)}{(n+1)(n+2)}+\frac{2r^2}{(n+1)(n+2)}-\frac{4r^2}{(n+1)^2}\right]$$

$$=2r\frac{[(r+1)(n+1)+r(n+1)-2r(n+2)]}{(n+1)^2(n+2)}(b-a)^2$$

$$=2r\frac{[rn+r+n+1+rn+r-2rn-4r]}{(n+1)^2(n+2)}(b-a)^2$$

$$=\frac{2r[n-2r+1]}{(n+1)^2(n+2)}(b-a)^2.$$

عندما $r=1$ فإن :

$$E(Y-X)=E(Y_n-Y_1)$$

$$=\frac{n-1}{n+1}(b-a).$$

$$\therefore E\left[\frac{n+1}{n-1}(Y_n-Y_1)\right]=b-a,$$

$$Var\left[\frac{n+1}{n-1}(Y_n - Y_1)\right] = \frac{2(b-a)^2(n-1)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

(٥-٢-٢) الطريقة الثانية (إتباع أسلوب بييز):

ليكن:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad a < x < b, \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \quad a \le x < b, \\ 1 & , \quad x \ge b. \end{cases}$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للاحصاءين الترتيبين Y_s, Y_r هي:

$$g_{r,s}(x,y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} f(x)f(y)$$
$$\cdot[F(x)]^{r-1}[F(y)-F(x)]^{s-r-1}[1-F(y)]^{n-s}.$$

ليكن:

$$X = Y_r \quad , \quad Y = Y_s \quad , \quad s > r \quad , \quad a \le x < y \le b.$$

عندما:

$$r = 1 \quad , \quad s = n,$$

فإن:

$$g_{1,n}(x,y) \qquad = n(n-1)\left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{y-a}{b-a} - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-2},$$
$$= \frac{n(n-1)(y-x)^{n-2}}{(b-a)^n} \quad , \quad a \le x < y \le b.$$

سوف نفترض التوزيع القبلي التالي:

$$\Pi_1(a,b) = \frac{\alpha_0(\alpha_0+1)(M_0 - m_0)^{\alpha_0}}{(b-a)^{\alpha_0+2}} \quad , \quad a \le m_0 < M_0 \le b.$$

التوزيع البعدي المرافق سوف يأخذ الشكل التالي:

$$\Pi_2\left(a,b|x,y\right)=\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{(b-a)^{\alpha_1+2}}\quad,\quad a\le m_1<M_1\le b.$$

حيث:

$$m_1=\text{Min}(x,m_0),$$
$$M_1=\text{Max}(y,M_0),$$
$$\alpha_1=\alpha_0+n.$$

التوزيع البعدي الهامشي لـــ b هو:

$$\Pi_3\left(b|x,y\right)=\int_{-\infty}^{m_1}\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{(b-a)^{\alpha_1+2}}da$$
$$=\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}\int_{-\infty}^{m_1}\frac{1}{(b-a)^{\alpha_1+2}}da.$$

ليكن:

$$(b-a)=q$$
$$\Pi_3\left(b|x,y\right)=\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}\int_{b-m_1}^{\infty}q^{-(\alpha+2)}dq$$
$$=\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}\left.\frac{q^{-(\alpha_1+1)}}{-(\alpha_1+1)}\right|_{b-m_1}^{\infty}$$
$$=\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{(\alpha_1+1)}(b-m_1)^{-(\alpha_1+1)}$$
$$=\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{(\alpha_1+1)(b-m_1)^{\alpha_1+1}}$$
$$=\frac{\alpha_1(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{(b-m_1)^{\alpha_1+1}}\quad,\quad b\ge M_1.$$

ليكن:

$$(b-m_1)=Z_1\quad\rightarrow\quad E(b)=E(Z_1)+m_1.$$
$$\therefore f_1(z_1)=\frac{\alpha_1(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{z_1^{\alpha_1+1}}.$$
$$\because b=z_1+m_1\quad,\quad M_1\le b\quad\rightarrow\quad\boxed{M_1-m_1\le z_1}.$$
$$\therefore E(Z_1)=\int_{M_1-m_1}^{\infty}\frac{\alpha_1(M_1-m_1)^{\alpha_1}z_1}{z^{\alpha_1+1}}dz_1$$

$$=\alpha_1(M_1-m_1)^{\alpha_1}\int_{M_1-m_1}^{\infty} z_1^{-\alpha_1}dz_1$$

$$=\alpha_1(M_1-m_1)^{\alpha_1}\left.\frac{z_1^{-\alpha_1+1}}{-\alpha_1+1}\right|_{M_1-m_1}^{\infty}$$

$$=\frac{\alpha_1(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{(\alpha_1-1)(M_1-m_1)^{\alpha_1-1}}.$$

المقدر البييزى للمعلمة b تحت فرض داله خسارة مربع الخطأ يمكن الحصول عليه كالتالى:

$$E(b|x,y)=E(Z_1)+m_1 \ .$$

التوزيع البعدى الهامشى لـــ a هو:

$$\Pi_4(a|x,y)=\int_{M_1}^{\infty}\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{(b-a)^{\alpha_1+2}}db$$

$$=\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}\int_{M_1}^{\infty}\frac{1}{(b-a)^{\alpha_1+2}}db$$

ليكن:

$$(b-a)=y,$$

$$\therefore \alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}\int_{M_1-a}^{\infty} y^{-\alpha_1-2}dy=\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{(\alpha_1+1)(M_1-a)^{\alpha_1+1}}$$

$$=\frac{\alpha_1(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{(M_1-a)^{\alpha_1+1}} \quad , \quad a\le m_1 \ .$$

ليكن:

$$z_2=M_1-a \quad \Rightarrow \quad -a=z_2-M_1$$

$$a=M_1-z_2 \quad , \quad a\le m_1$$

$$M_1-z_2\le m_1 \quad \Rightarrow \quad M_1-m_1\le z_2$$

$$z_2\ge M_1-m_1,$$

$$f_2(z_2)=\frac{\alpha_1(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{z_2^{\alpha_1+1}} \quad , \quad z_2\ge M_1-m \ .$$

المقدر البييزى للمعلمه a هو $E(a|x,y)$ تحت فرض داله خسارة مربع الخطأ والذى يمكن إيجاده بدلاله المتغير Z_2 حيث:

$$E(a|x,y)=M_1-E(Z_2).$$

الآن سوف نوجد التوزيع المشترك البعدى للمتغيرين μ , ϕ بدلاله داله التوزيع المشترك البعدى للمتغيرين a , b حيث المتوسط والمدى للتوزيع المستطيل هما على التوالي:

$$E(X)=\frac{a+b}{2}=\mu\ ,$$
$$(b-a)=\phi\ .$$

ليكن:

$$\mu=\frac{a+b}{2}\quad ,\quad \phi=b-a\ ,$$

بحل المعادلتين آنيا إذن:

$$2\mu=a+b\quad\Rightarrow\quad \frac{\phi=b-a}{2\mu+\phi=2b}$$
$$\Rightarrow\quad \boxed{b=\mu+\frac{\phi}{2}}$$
$$\Rightarrow\quad 2\mu=a+\mu+\frac{\phi}{2}$$
$$\Rightarrow\quad 2\mu-\mu-\frac{\phi}{2}=a$$
$$\Rightarrow\quad \boxed{a=\mu-\frac{\phi}{2}}\ ,$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial a}{\partial\mu} & \frac{\partial a}{\partial\phi}\\ \frac{\partial b}{\partial\mu} & \frac{\partial b}{\partial\phi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\ .$$

أى أن التوزيع المشترك البعدى لـــ μ , ϕ هو:

$$\therefore\ \Pi_5\left(\mu,\phi\middle|x,y\right)=\frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{\phi^{\alpha_1+2}}.$$

بما أن:

$$\mu-\frac{1}{2}\phi\le m_1<M_1\le\mu+\frac{1}{2}\phi\quad\Rightarrow\quad M_1\le\mu+\frac{1}{2}\phi\quad ,\quad \mu-\frac{1}{2}\phi\le m_1$$
$$\Rightarrow\quad M_1-\frac{1}{2}\phi\le\mu\quad ,\quad \mu\le m_1+\frac{1}{2}\phi$$
$$\Rightarrow\quad M_1-\frac{1}{2}\phi\le\mu\le m_1+\frac{1}{2}\phi.$$

التوزيع الهامشى البعدى للمتغير ϕ نحصل عليه كالتالى:

$$\Pi_6(\phi|x,y) = \int_{M_1-\frac{1}{2}\phi}^{m_1+\frac{1}{2}\phi} \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{\phi^{\alpha_1+2}} d\mu$$

$$= \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{\phi^{\alpha_1+2}} \int_{M_1-\frac{1}{2}\phi}^{m_1+\frac{1}{2}\phi} d\mu$$

$$= \frac{\alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1}}{\phi^{\alpha_1+2}}[m_1-M_1+\phi].$$

$$\Rightarrow \quad \phi-(M_1-m_1)=m_1-M_1+\phi$$

$$\therefore \quad \phi \ge M_1-m_1.$$

المقدر البييزى للمعلمه ϕ هو $E(\phi|x,y)$ تحت فرض داله خسارة مربع الخطأ والذى يمكن ايجاده بسهوله من $\Pi_6(\phi|x,y)$

للحصول على التوزيع الهامشي البعدي للمتغير μ نتبع الآتى :

$$\mu-\frac{1}{2}\phi \le m_1 < M_1 \le \mu+\frac{1}{2}\phi \quad \Rightarrow \quad \mu-\frac{1}{2}\phi \le m_1 \quad , \quad M_1 \le \mu+\frac{1}{2}\phi$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\phi \le m_1-\mu$$

$$\Rightarrow \quad -\phi \le 2(m_1-\mu)$$

$$\Rightarrow \quad \phi \ge -2(m_1-\mu)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi \ge 2(\mu-m_1)}.$$

ايضا:

$$M_1 \le \mu+\frac{1}{2}\phi \Rightarrow \quad M_1-\mu \le \frac{1}{2}\phi$$

$$\Rightarrow \quad 2(M_1-\mu) \le \phi$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi \ge 2(M_1-\mu)}$$

التوزيع الهامشى البعدى لـــ μ هو:

$$\therefore \Pi_7(\mu|x,y) = \alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1} \int_{2(M_1-\mu)}^{\infty} \phi^{-(\alpha_1+2)} d\phi$$

$$= \alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1} \left. \frac{\phi^{-(\alpha_1+1)}}{-(\alpha_1+1)} \right|_{2(M_1-\mu)}^{\infty}$$

$$= \alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1} \left[2(M_1 - \mu)\right]^{-(\alpha_1+1)}$$

$$= \frac{\alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{2^{\alpha_1+1} (M_1 - \mu)^{\alpha_1+1}}.$$

أو:

$$\Pi_7(\mu|x,y) = \alpha_1(\alpha_1+1)(M_1-m_1)^{\alpha_1} \int_{2(\mu-m_1)}^{\infty} \phi^{-(\alpha+2)} d\phi$$

$$= \alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1} (\alpha_1+1) \left. \frac{\phi^{-(\alpha_1+1)}}{-(\alpha_1+1)} \right|_{2(\mu-m_1)}^{\infty}$$

$$= \alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1} (\mu - m_1)^{-(\alpha_1+1)} 2^{-(\alpha_1+1)}$$

$$= \frac{\alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{2^{\alpha_1+1} (\mu - m_1)^{\alpha_1+1}} .$$

أى أن التوزيع الهامشى البعدى يمكن كتابته على الصورة:

$$\therefore \Pi_7(\mu|X,Y) = \begin{cases} \dfrac{\alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{2^{\alpha_1+1} (M_1 - \mu)^{\alpha_1+1}} & , \quad \mu \le \dfrac{M_1 + m_1}{2} \\ \dfrac{\alpha_1 (M_1 - m_1)^{\alpha_1}}{2^{\alpha_1+1} (\mu - m_1)^{\alpha_1+1}} & , \quad \mu \ge \dfrac{M_1 + m_1}{2} \end{cases}$$

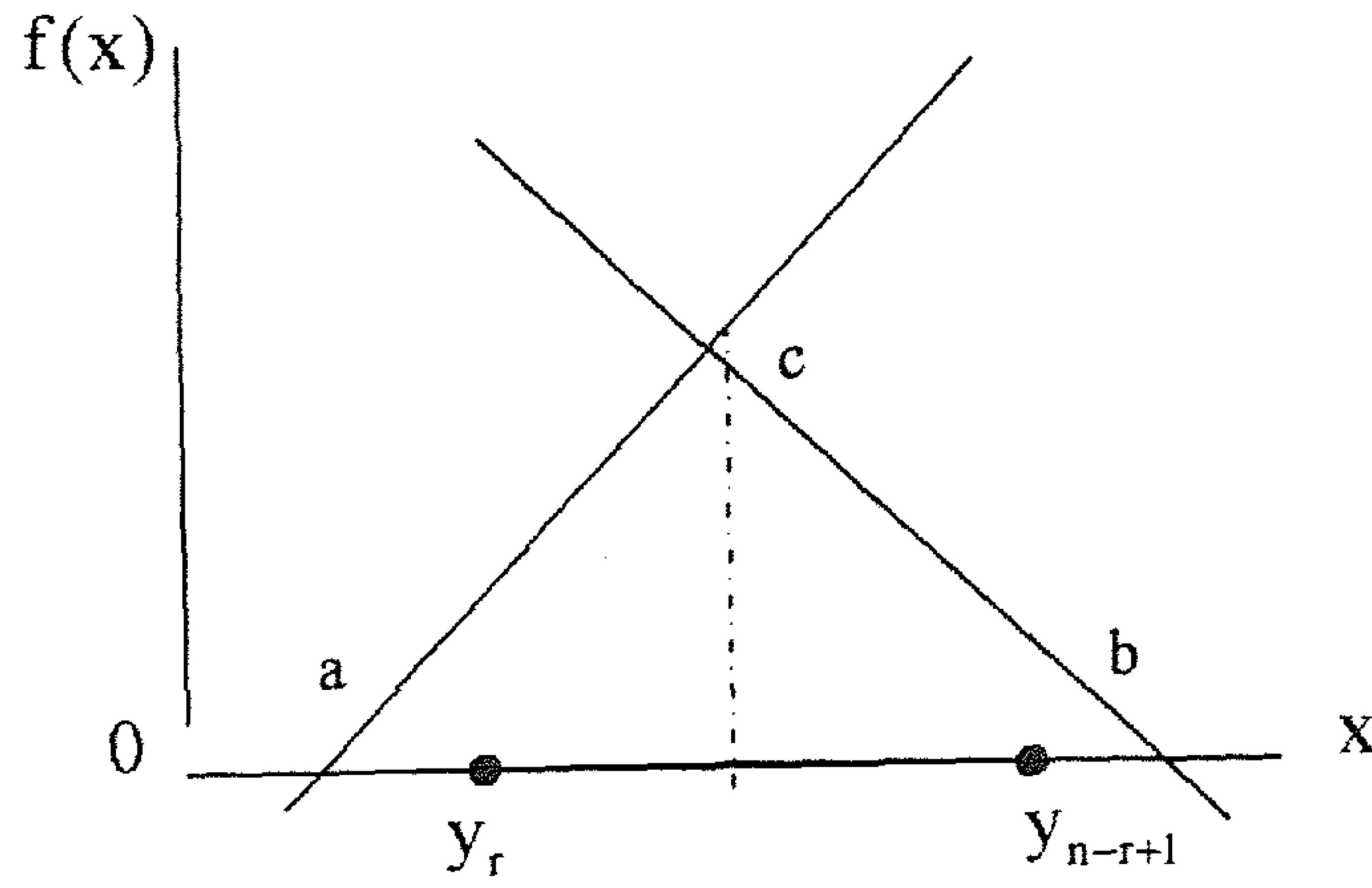
المقدر البييزى للمعلمه μ هو $E(\mu|x,y)$ تحت فرض داله خسارة مربع الخطأ والذى يمكن ايجاده بسهوله من $\Pi_7(\mu|X,Y)$.

(٣-٥) التوزيع المثلث:
The Triangular Distribution

يهتم هذا البند بإيجاد مقدر لكل من الوسط الحسابي والمدى للتوزيع المثلث يعتمد على الإحصاءات الترتيبية . ليكن $Y_1 < Y_2 < \cdots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية مختارة من مجتمع مثلث بدالة كثافة احتمال:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2} & , \quad \dfrac{a+b}{2}<x<b \\ \dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2} & , \quad a<x<\dfrac{a+b}{2} \\ 0 & , \quad e.w. \end{cases}$$

الوسط الحسابي للمجتمع هو $\dfrac{a+b}{2}$ والمدى هو $b-a$. سوف نعتبر $\mu^*=\dfrac{Y_n+Y_1}{2}$ مقدرا للوسط الحسابي و Y_n-Y_1 مقدراً للمدى. الآن سوف ندرس خواص تلك المقدرات. بفرض أن Y_r و Y_{n-r+1} تمثل الإحصاءات الترتيبية من القمة والقاع على الترتيب.:



باخذ التحويله

$$\begin{aligned} w &= nF(x) \\ &= n\int_a^x \frac{4(t-a)}{(b-a)^2}dt \\ &= \frac{2n(x-a)^2}{(b-a)^2}. \end{aligned}$$

$$\therefore X = a+\frac{(b-a)}{2n}\sqrt{W}, X=Y_r.$$

وبالمثل بأخذ التحويلة

$$\begin{aligned} z &= n\left[1-F(y)\right] \\ &= n\left[1-\int_a^y \frac{4(b-t)}{(b-a)^2}dt\right] \end{aligned}$$

$$= n\left\{1-\left[\frac{1}{2}+\int_{\frac{x+b}{2}}^{y}\frac{4(b-t)}{(b-a)^2}dt\right]\right\}$$

$$= n\left\{1-\left[1-\frac{2(b-y)^2}{(b-a)^2}\right]\right\}$$

$$= \frac{2n(b-y)^2}{(b-a)^2}.$$

$$\therefore Y = b-\frac{b-a}{\sqrt{2n}}\sqrt{Z} \quad , \quad Y = Y_{n-r+1}.$$

عندما $r=1$ فإن:

$$X = a+\frac{b-a}{\sqrt{2n}}\sqrt{W},$$

$$Y = b-\frac{b-a}{\sqrt{2n}}\sqrt{Z} \ .$$

دالة كثافة الاحتمال للمتغير W هي:

$$\therefore g_r(x) = \binom{n-1}{r-1}\left(\frac{x}{n}\right)^{r-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-r}$$

بوضع $u=\sqrt{w}$ فإن:

$$h(u) = \frac{2}{n^{r-1}}\binom{n-1}{r-1}u^{2r-1}\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^{n-r} \quad , \quad 0 \le u \le n.$$

$$\therefore E\left(U^k\right) = \frac{2}{n^{r-1}}\binom{n-1}{r-1}\int_0^n u^{2r+k-1}\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^{n-r} du \ .$$

بكتابة:

$$z_1 = \frac{u^2}{n} \quad \Rightarrow \quad dz_1 = \frac{2u}{n}du \ .$$

$$\therefore E\left(U^k\right) = \frac{n^{\frac{k}{2}+1}(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}B\left(r+\tfrac{k}{2}, n-r+1\right) \ .$$

وبنفس الشكل عندما: $v=\sqrt{z},$ فإن:

$$E\left(V^k\right) = \frac{n^{\frac{k}{2}+1}(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}B\left(r+\tfrac{k}{2}, n-r+1\right)$$

أيضاً، نعلم أن:

$$g(w,z)=\frac{1}{n^2}\frac{n!}{(r-1)^2!(n-2r)!}\left(\frac{w}{n}\right)^{r-1}\left(\frac{z}{n}\right)^{r-1}\left(1-\frac{w}{n}-\frac{z}{n}\right)^{n-2r}$$

بوضع:

$$u=\sqrt{w} \quad , \quad v=\sqrt{z}$$

$$p(u,v)=\frac{4}{n^2}\frac{n!}{(r-1)!(n-2r)!}\frac{u^{2r-1}}{n^{r-1}}\frac{v^{2r-1}}{n^{r-1}}\left(1-\frac{u^2}{n}-\frac{v^2}{n}\right)^{n-2r} \cdot$$

$$\therefore E\left(U^kV^\ell\right)=\int_0^{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n-u^2}} u^kv^\ell\, p(u,v)\,dv\,du$$

$$=c\int_0^{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n-u^2}} u^{2r+k-1}v^{2r+\ell-1}\left(1-\frac{u^2}{n}-\frac{v^2}{n}\right)^{n-2r} dv\,du \ ,$$

حيث:

$$c=\frac{4}{n^{2r}}\frac{n!}{(r-1)!(n-2r)!} \cdot$$

$$\therefore E\left(U^kV^\ell\right)=c\int_0^{\sqrt{n}} u^{2r+k-1}\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^{n-2r}\int_0^{\sqrt{n-u^2}} v^{2r+\ell-1}\left(1-\frac{\frac{v^2}{n}}{1-\frac{u^2}{n}}\right)^{n-2r} dv\,du \cdot$$

بكتابة:

$$z_2=\frac{\frac{v^2}{n}}{1-\frac{u^2}{n}} \quad \Rightarrow \quad dv=\frac{\sqrt{n}}{2}\left(1-\tfrac{u^2}{n}\right)\frac{1}{\sqrt{z_2}}dz_2 \cdot$$

$$\therefore E\left(U^kV^\ell\right)=\frac{c}{2}\int_0^{\sqrt{n}} u^{2r+k-1}\left(1-\tfrac{u^2}{n}\right)^{n-2r} n\left(1-\tfrac{u^2}{n}\right)^{r+\frac{\ell}{2}}\cdot\int_0^1 z_2^{r+\frac{\ell}{2}-1}\left(1-z_2\right)^{n-2r}dz_2\,du$$

$$=c'\int_0^{\sqrt{n}} u^{2r+k-1}\left(1-\tfrac{u^2}{n}\right)^{n-r+\frac{\ell}{2}} B\left(r+\frac{\ell}{2},n-2r+1\right)du,$$

حيث:

$$c'=\frac{2}{n^{r-\ell}}\frac{n!}{(r-1)!(n-2r)!}$$

بكتابة:

$$y=\tfrac{u^2}{n} \quad \Rightarrow \quad du=\frac{\sqrt{n}}{2}y^{-\frac{1}{2}}dy \cdot$$

$$\therefore E\left(U^kV^\ell\right)=\frac{n^{(k+\ell)/2}n!}{(r-1)!(n-2r)!}\cdot B\left(r+\frac{\ell}{2},n-2r+1\right)\cdot B\left(r+\tfrac{k}{2},n-r+\frac{\ell}{2}+1\right)$$

$$=n^{\frac{k+\ell}{2}}\frac{n!}{(r-1)!}\frac{\Gamma(r+\frac{\ell}{2})\Gamma(r+\frac{k}{2})}{\Gamma\left(r+\frac{k}{2}+\dfrac{\ell}{2}+1\right)}$$

بوضع $r=1$ و $k=\ell=1$ فإن:

$$E(U)=E(V)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}n^{\frac{3}{2}}\frac{(n-1)!}{(n+\frac{1}{2})!}\ ,$$

$$E(UV)=\frac{\pi}{4}n\frac{n!}{(n+1)!}\ .$$

باستخدام صيغة استرلنج وهي $n!\sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$ فإننا نحصل على الصيغ التالية التقريبية:

$$E(U)=E(V)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}n^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}}\frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{(n+\frac{1}{2})^{n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}n^{3/2}e^{3/2}\left[1+\frac{3/2}{n-1}\right]^{-(n-1)}\frac{(n-2)^2}{(n+\dfrac{1}{2})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{3/2}{n-1}\right]^{-(n-1)}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-2}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1+\frac{1}{2(n-1)}(-\tfrac{3}{2})^2+\frac{1}{3(n-1)^2}(-\tfrac{3}{2})^3+\cdots\right]\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{-2}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1-\frac{3}{8n}-\frac{45}{16n^2}-\cdots\right]$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$E(UV)=\frac{\pi}{4}ne\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\frac{n}{(n+1)^2}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\cdots\right)\left[1+\frac{1}{n}\right]^{-2}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{3}{2n}+\frac{5}{3n^2}\cdots\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] .$$

$$\therefore\ E\left(\frac{Y_n+Y_1}{2}\right)=\frac{a+b}{2} .$$

$$Var\left(\frac{Y_n+Y_1}{2}\right)=E\left[\frac{Y_n+Y_1}{2}-E\left(\frac{Y_n+Y_1}{2}\right)\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}E\left[(Y_n-b)+(Y_1-a)\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{(n-a)^2}{n+1}-\frac{(b-a)^2}{n}\frac{\pi}{4}\left\{1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{(b-a)^2}{n}\left\{1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}-\frac{(b-a)^2}{n}\frac{\pi}{4}\left\{1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{(b-a)^2}{4n}(4-\pi)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$=\frac{(b-a)^2}{16n}(4-\pi)+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

أيضا:

$$E(Y_n-Y_1)=(b-a)-\frac{-2(b-a)}{2n}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=(b-a)\left\{1-\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\right\}^2+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

$$Var(Y_n-Y_1)=E\left[(Y_n-Y_1)-E(Y_n-Y_1)\right]^2$$

$$=E\left[(Y_n-b)-(Y_1-a)+\frac{b-a}{\sqrt{2n}}\sqrt{\pi}\left\{1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\right]^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{n}+\frac{(b-a)^2}{n}\frac{\pi}{4}+\left\{1+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}-\frac{(b-a)^2}{n}\pi\left\{1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^2$$

$$+\frac{(b-a)^2}{2n}\pi\left\{1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}^2$$

$$= \frac{(b-a)^2}{n} - \frac{(b-a)^2}{n}\frac{\pi}{4} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4n}(4-\pi) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(٥-٤) توزيع لابلاس
Laplace's Distribution

ليكن $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية من عينة عشوائية مختارة من توزيع لابلاس بداله كثافة احتمال :

$$f(x) = \frac{1}{2b}\bar{e}^{\frac{|x-a|}{0}} \quad , \ -\infty<x<\infty$$

سوف نعتبر $\frac{Y_n + Y_1}{2}$ مقدرا للمعلمه a و $\frac{Y_n - Y_1}{2}$ مقدار للمعلمه b.

الآن سوف ندرس خواص هذا المقدر عندما $x > a$ فإن:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2b}\int_a^x e^{-\left(\frac{t-a}{b}\right)}dt$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\ e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)}.$$

عندما $x < a$ فإن:

$$F(x)=\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t-a}{b}}dt=\frac{1}{2}\ e^{\frac{x-a}{b}}.$$

بأخذ التحويلة :

$$\therefore w=nF(x)=\frac{n}{2}\ e^{(x-a)/b}.$$

$$\therefore X=a-b\ln\frac{n}{2}+b\ln\ W \qquad (١٠٥)$$

أيضا التحويلة :

$$z=n\left[1-F(y)\right]=\frac{n}{2}\bar{e}^{\left(\frac{y-a}{b}\right)}$$

$$\therefore Y=a+b\ln\frac{n}{2}-b\ln\ Z \qquad (٢٠٥)$$

ليكن :

$$v=-\ln w,$$
$$u=-\ln z\ .$$

من (١٠٥) و (٢٠٥) فإن:

$$X=a-b\ln\frac{n}{2}-bV,$$

$$Y=a+b\ln\frac{n}{2}+bU$$

ولكن نعلم أن نهايه التوزيعات لكل من W , Z هما:

$$h_1(w)=\frac{1}{(r-1)!}\ w^{r-1}\ e^{-w},$$

$$h_2(z)=\frac{1}{(r-1)!}\ z^{r-1}\ e^{-z}.$$

أيضا فى النهايه فإن Z , W مستقلين. وعلى ذلك توزيع النهايه لكل من U , V هما:

$$g_1(v)=\frac{1}{\Gamma(r)}\ \exp\left[-rv-e^{-v}\right],$$

$$g_2(u)=\frac{1}{\Gamma(r)}\ \exp\left[-ru-e^{-u}\right].$$

أيضا فى النهايه فإن U , $-V$ مستقلين.

$$\therefore E(V^k)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_{-\infty}^{\infty} v^k\ \exp\left[-rv-e^{-v}\right]dv$$

بكتابة:

$$y = e^{-v} \Rightarrow dy = -e^{-v}\, dv$$

$$\therefore E(V^k) = \frac{(-1)^k}{\Gamma(r)} \int_0^\infty (\ln y)^k\, y^{r-1}\, e^{-y}\, dy$$

$$= (-1)^k \frac{\Gamma^{(k)}_{(r)}}{\Gamma(r)}.$$

بنفس الشكل:

$$E(U^k) = (-1)^k \frac{\Gamma^{(k)}_{(r)}}{\Gamma(r)}$$

وعلى الأخص:

$$E(V) = E(U) = \frac{\Gamma'_{(r)}}{\Gamma(r},$$

$$E(V^2) = E(U^2) = \frac{\Gamma''_{(r)}}{\Gamma(r)}$$

عندما $r = 1$ فإن :

$$E(V) = E(U) = -\Gamma'_{(1)} = -\gamma$$

(حيث γ هو Euler's Constant)

$$E(V^2) = E(U^2) = -\Gamma''_{(1)} = \frac{\pi^2}{6} + \gamma^2 = 1.978112,$$

$$Y_1 = X = a - b\ln\frac{n}{2} - bV,$$

$$Y_n = Y = a + b\ln\frac{n}{2} + bU,$$

وعلى ذلك :

$$E\left(\frac{Y_n + Y_1}{2}\right) = a \cdot$$

أى ان $\frac{Y_n + Y_1}{2}$ مقدرا غير متحيز للمعلمه a.

أيضا:

$$Var\left(\frac{Y_n + Y_1}{2}\right) = \frac{1}{4} E\left[(Y_n + Y_1) - E(Y_n + Y_1)\right]^2$$

$$= \frac{b^2}{4} E\left(U - V)^2\right) = \frac{\pi^2 b^2}{12} \cdot$$

ايضا:

$$E\left(\frac{Y_n - Y_1}{2}\right) = b\left(\ln\frac{n}{2} - \gamma\right) \quad ,$$

أيضا :

$$Var\left(\frac{Y_n - Y_1}{2}\right) = \frac{1}{4}E\left[\left(Y_n - Y_1\right) - E\left(Y_n - Y_1\right)\right]^2$$

$$= \frac{b^2}{4}E\left(U + V + \gamma\right)^2\right) = \frac{b^2}{12}(\pi^2 + 3\gamma^2)$$

(٥-٥) توزيع كوشي
Couchy's Distribution

ليكن $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ الإحصاءات الترتيبية لعينة عشوائية مختارة من توزيع كوشي بداله كثافة احتمال:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \; \frac{b}{b^2 + (x-a)^2} \quad , \; -\infty < x < \infty \cdot$$

سوف نعتبر $\frac{Y_n + Y_1}{2}$ مقدار للمعلمه a , $Y_n - Y_1$ مقدرا للمعلمه b . الآن سوف ندرس خواص تلك المقدرات. ليكن :

$$w = n\; F(x) = \frac{nb}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b^2 + (t-a)^2}dt$$

$$= -\frac{n}{\pi}Cot^{-1}\left(\frac{x-a}{b}\right)$$

$$\therefore \quad x = a - b\; Cot\left(\frac{\pi\, w}{n}\right)$$

$$= a - \frac{b\, n}{\pi\, w} + o\left(\frac{w}{n}\right) \; .$$

بنفس الشكل:

$$z = n\left[1 - F(y)\right] = \frac{nb}{\pi}\int_{y}^{\infty} \frac{1}{b^2(t-a)^2}dt.$$

$$= \frac{n}{\pi}\; Cot^{-1}\left(\frac{y-a}{b}\right)$$

$$\therefore \; y = a + \frac{bn}{\pi z} + o\left(\frac{z}{n}\right) \; .$$

ليكن:

$$u=\frac{1}{w}\ ,\ v=\frac{1}{z}\ .$$

فإن:

$$X=a-\frac{bn}{\pi}U+o\left(\frac{1}{nU}\right),$$

$$Y=a+\frac{nb}{\pi}V+o\left(\frac{1}{nV}\right)$$

ولكن نعلم أن نهايه التوزيع لكل من W , Z هما:

$$g_1(w)=\frac{1}{(r-1)!}\ w^{r-1}\ e^{-w},$$

$$g_2(z)=\frac{1}{(r-1)!}\ z^{r-1}\ e^{-z}.$$

$$\therefore p_1(u)=\frac{1}{(r-1)!}\ u^{-r-1}\ e^{-\frac{1}{u}}$$

بنفس الشكل :

$$p_2(v)=\frac{1}{(r-1)!}\ v^{-r-1}\ e^{-1/v}.$$

أيضا V , U مستقلين . اذن:

$$E(U)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{1/n}^{\infty}u^{-r}\ e^{-\frac{1}{u}}du$$

بكتابة:

$$y=\frac{1}{u}\Rightarrow dy=-\frac{1}{u^2}du\cdot$$

$$\therefore E(U)=\frac{1}{(r-1)!}\int_{0}^{n}y^{r-2}\ e^{-y}dy$$

$$=\frac{\Gamma_{(n)}^{(r-1)}}{\Gamma(r)}=\frac{1}{r-1}I_n(r-1).$$

ايضا :

$$E(U^2)=\frac{\Gamma_{(n)}^{(r-2)}}{\Gamma(r)}=\frac{1}{(r-1)(r-2)}\ I_n(r-1).$$

بنفس الشكل نتائج يمكن الحصول عليها بالنسبة لـــ V .

عندما $r > 2$ فإن:

$$E\left[\frac{(Y_{n-r+1}+Y_r)}{2}\right]=a,$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Var}\left(\frac{Y_{n-r+1}+Y_r}{2}\right)\\
&=\frac{1}{4}E\left[\left(Y_{n-r+1}+Y_r\right)-E\left(Y_{n-r+1}+Y_r\right)\right]^2\\
&=\frac{b^2n^2}{4\pi^2}E(V-U)^2\\
&=\frac{b^2\,n^2}{4\,\pi^2}\left[\frac{2}{(r-1)(r-2)}I_n(r-1)-\frac{2}{(r-1)^2}\{I_n(r-1)\}^2\right]\\
&=\frac{b^2\,n^2}{4\,\pi^2}\left[\frac{2}{(r-1)(r-2)}-\frac{2}{(r-1)^2}+o(n)\right]\\
&=\frac{1}{2(r-1)^2(r-2)}\left(\frac{bn}{\pi}\right)^2+o(n).
\end{aligned}$$

وبما أن هذا المقدر لا يتقارب فى الاحتمال الى a ، أى ان هذا المقدر لا يمتلك صفه الكفايه ولكنه غير متحيز. أيضا:

$$E\left(\frac{Y_{n-r+1}-Y_r}{2}\right)=\frac{bn}{\pi}\frac{1}{r-1}I_n(r-1)$$

$$\operatorname{Var}\left(\frac{Y_{n-r+1}-Y_r}{2}\right)=\frac{1}{4}E\left[(Y_{n-r+1}-Y_r)-E(Y_{n-r+1}-Y_r)\right]^2$$

$$=\frac{(bn)^2}{4\pi^2}E\left[V+U-\frac{2}{r-1}I_n\right]^2=\frac{(bn)^2}{2\pi^2(r-1)^2(r-2)}+o(n)\cdot$$

الباب السادس

تقدير الفترة لمعالم بعض التوزيعات بالاعتماد علي الإحصاءات الترتيبية

(٦-١) مقدمــة

قبل الدخول فى الحصول على $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة لمعالم بعض التوزيعات بالاعتماد على الإحصاءات الترتيبية ، سوف نقدم بصورة عامه الفكره العامه لتكوين أقصر فترات ثقه لبعض التوزيعات وذلك لتسهيل الفهم.

(أ) $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للمعلمة μ عندما σ^2 معلومة و $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

فى حالة معرفة تباين المجتمع فإن : $Z = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $Z \sim N(0,1)$

$$\therefore P(a < Z < b) = 1-\alpha$$

$$P\left(a < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < b\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma b}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} - \frac{\sigma a}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha.$$

وتكون الفترة $\left(\bar{X}-\frac{b\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}-\frac{a\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ هى $100(1-\alpha)\%$ فتره ثقه للمعلمه μ وان طول هذه الفتره هو :

$$\ell = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}[b-a].$$

ويجب اختيار a, b بحيث يكون طول الفترة ℓ أقل ما يمكن بشرط أن:

$$\int_a^b f(z)dz = 1-\alpha \qquad (٦٠١)$$

الآن :

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\frac{\partial b}{\partial a} - 1\right) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial b}{\partial a} = 1. \qquad (٦٠٢)$$

يلاحظ أن (١٠٦) تعطى b كداله فى a وبتفاضل (١٠٦) بالنسبه الى a:

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(z)dz = 1-\alpha.$$

$$\therefore f(b)\frac{\partial b}{\partial a}-f(a)=0$$

$$\frac{\partial b}{\partial a}=\frac{f(a)}{f(b)}.$$

ومن (٦-٢) فإن :

$$1=\frac{f(a)}{f(b)}$$

$$\Rightarrow f(a)=f(b)$$

$$\therefore a=-b$$

ونحصل علي قيمه b من جدول التوزيع الطبيعى القياسي فى ملحق (٢) حيث:

$$P(0<Z<b)=0.5-\frac{\alpha}{2}\cdot$$

فإذا كانت $1-\alpha=0.95$ مثلا فإن:

$$P(0<Z<b)=0.475.$$

وعلى ذلك :

$$a=-1.96\ ,\ b=1.96\cdot$$

(ب) $100(1-\alpha)\%$ فتـرة ثقـة للمعلمـة μ عنـدما σ^2 غيـر معلومـة حيـث

$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}\sim t_{n-1}$ و:

$$S^2=\frac{1}{n}\sum\left(X-\bar{X}\right)^2.$$

$$\because P\left(t_1<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n-1}}}<t_2\right)=1-\alpha\cdot$$

$$\therefore P\left(\bar{X}-t_2\frac{S}{\sqrt{n-1}}<\mu<\bar{X}-t_1\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right)\ ,$$

$$\ell=\frac{S}{\sqrt{n-1}}\left[t_2-t_1\right]\cdot$$

الآن :

$$\frac{\partial\ell}{\partial t_1}=\frac{S}{\sqrt{n-1}}\left[\frac{\partial t_2}{\partial t_1}-1\right]=0$$

$$\therefore \frac{\partial t_2}{\partial t_1} = 1, \qquad (٣٠٦)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = 1-\alpha \cdot$$

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = 0$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial t_1} f(t_2) - f(t_1) = 0$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial t_1} f(t_2) = f(t_1)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial t_1} = \frac{f(t_1)}{f(t_2)} \cdot$$

ومن (٣٠٦) فإن:

$$\frac{f(t_1)}{f(t_2)} = 1$$

$$\therefore f(t_1) = f(t_2)$$

$$t_1 = -t_2 \cdot$$

ويمكن الحصول على t_2 من جدول توزيع t في ملحق (٤) حيث:

$$P(T > t_2) = \frac{\alpha}{2} \cdot$$

فعندما $\alpha = 0.05$ فإن:

$$P(T > t_2) = 0.025$$

أذن $\nu = n-1 = 9$, $n = 10$, $t_1 = -2.262$, $t_2 = 2.262$

(ج) $100(1-\alpha)\%$ فتره ثقه للتباين σ^2 عندما μ معروفه و $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum(X_j - \mu)^2$$

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{\sum(X_j - \mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)}$$

$$P\left(v_1 < \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} < v_2\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{v_2} < \sigma^2 < \frac{n\hat{\sigma}^2}{v_1}\right) = 1-\alpha \cdot$$

الآن :

$$\ell = n\hat{\sigma}^2\left[\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial v_1} = n\hat{\sigma}^2\left[\frac{-1}{v_1^2} + \frac{\partial v_2}{\partial v_1}\cdot\ \frac{1}{v_2^2}\right] = 0$$

$$\frac{1}{v_1^2} = \frac{\partial v_2}{\partial v_1}\cdot\frac{1}{v_2^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial v_2}{\partial v_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2}}, \qquad (٦•٤)$$

$$\int_{v_1}^{v_2} f(t)dt = 1-\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\int_{v_1}^{v_2} f(t)dt = 1-\alpha$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial v_1} f(v_2) - f(v_1) = 0$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial v_1} = \frac{f(v_1)}{f(v_2)}$$

$$\therefore \frac{f(v_1)}{f(v_2)} = \frac{v_2^2}{v_1^2} \Rightarrow v_1^2 f(v_1) = v_2^2 f(v_2)\cdot$$

أى أن مربع v_1 مضروب فى العمود المقام عند v_1 = مربع v_2 مضروب فى العمود المقـــام عند v_2 .

(٦-٢) فتره ثقه لمعالم بعض التوزيعات بالاعتماد علي الاحصاءات الترتيبية

(أ) $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للمعلمة θ تحت فرض دالة كثافة الاحتمال :

$$f(x) = \frac{1}{\theta} \qquad , 0 < x < \theta,$$

إذا كانت $X_1, X_2, \ldots, X_n$ عينه مختاره من هذا التوزيع فإن داله الامكان هي:

$$L \alpha \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\theta}$$

$$\therefore L = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & 0 < y_1 < y_2 <,\ldots < y_n < \theta \\ 0 & ,e.w \cdot \end{cases}$$

$\hat{\theta} = Y_n$ حيث Y_n احصاء كافي للمعلمه θ .

ليكن: $Y = Y_n$

ليكن: $0 < y < \theta$

داله كثافه الاحتمال للاحصاء الترتيبي من الرتبه n (Y_n) هو:

$$g_n(y) = \frac{n\, y^{n-1}}{\theta^n}$$

ليكن:

$$u = \frac{y}{\theta},$$

$$\therefore f(u) = nu^{n-1} \qquad 0 < u < 1.$$

ويمكن اختيار u_1, u_2 بحيث أن:

$$\int_{u_1}^{u_2} n\, u^{n-1} du = u_2^n - u_1^n = 1 - \alpha \cdot \qquad (٥\cdot٦)$$

$$\therefore P\left(u_1 < \frac{Y_n}{\theta} < u_2\right) = 1 - \alpha \cdot$$

$$P\left(\frac{Y_n}{u_2} < \theta < \frac{Y_n}{u_1}\right) = 1 - \alpha \cdot \qquad (٦\cdot٦)$$

$$\therefore \ell = Y_n\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right),$$

$$P(u_1 < U < u_2) = 1-\alpha \cdot$$

نلاحظ أن اقصر فتره عندما تكون $u_2 = 1$ ويمكن أثبات ذلك جبريا كمايلي:

من (٦٠٥) نلاحظ أن:

$$0 = nu_2^{n-1} - nu_1^{n-1}\frac{\partial u_1}{\partial u_2} \Rightarrow \frac{\partial u_1}{\partial u_2} = \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n-1}$$

ومن (٦٠٦) نلاحظ أن :

$$\frac{\partial \ell}{\partial u_2} = -\frac{Y_n}{u_1^2}\frac{\partial u_1}{\partial u_2} + \frac{Y_n}{u_2^2} = \frac{-Y_n}{u_1^2}\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^{n-1} + \frac{Y_n}{u_2^2}$$

$$= -Y_n\frac{\left(u_2^{n+1} - u_1^{n+1}\right)}{u_2^2 u_1^{n+1}} < 0$$

وهذا يعنى أن ℓ داله تناقصيه فى u_2 وتكون أقل قيمه لها عندما يكون u_2 اكبر ما يمكن أى عندما $u_2 = 1$.

$$\therefore P(u_1 < U < 1) = 1-\alpha$$

$$1 - P(U < u_1) = 1-\alpha$$

$$P(U < u_1) = \alpha$$

$$\int_0^{u_1} nu^{n-1}du = \alpha$$

$$u_1^n = \alpha$$

$$u_1 = \alpha^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore P\left(\alpha^{\frac{1}{n}} < \frac{Y_n}{\theta} < 1\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(Y_n < \theta < \frac{Y_n}{\alpha^{\frac{1}{n}}}\right) = 1-\alpha$$

وعلي ذلك الفتره:

$$\ell = \left[Y_n, \frac{Y_n}{\alpha^{\frac{1}{n}}}\right]$$

تمثل أقصر فترة ثقة لـــ θ .

(ب) $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للمعلمة θ تحت فرض دالة كثافة الاحتمال.

$$f(x) = e^{-(x-\theta)} \qquad x > \theta \, , 0 \quad \text{e.w.}$$

الإحصاء الترتيبي Y_1 احصاء كافي للمعلمه θ.

داله كثافة الاحتمال للاحصاء الترتيبي Y_1 هي:

$$g_1(y) = n\, e^{-n(y-\theta)} \qquad , y > \theta.$$

ليكن :

$$u = 2n(y-\theta) \, , Y = Y_1$$

$$f_U(u) = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{u}{2}} \qquad , \quad u > 0 \, .$$

$$P(u_1 < U < u_2) = 1-\alpha$$

$$P(0 < U < u_2) = 1-\alpha$$

$$P(U < u_2) = 1-\alpha$$

$$\int_0^{u_2} \frac{1}{2}\, e^{-\frac{u}{2}} du = 1-\alpha$$

$$\therefore 1 - e^{-\frac{u}{2}} = 1-\alpha \cdot$$

$$-\frac{u}{2} = \ln \alpha$$

$$u_2 = -2\ln \alpha$$

$$P(0 < U < -2\ln\alpha) = 1-\alpha.$$

إذن أقصر فتره ثقه للمعلمه θ هى $\ell = (0, -2 \ln \alpha)$.

(ج) $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة لمعلمه الشكل في توزيع وايبل.

ليكن :

$$X = Y_r \;,\quad Y = Y_s \;, r < s \,.$$

$$g_{r,s}(x\,,y) = K\;\; f(x)\, f(y)\left[F(x)\right]^{r-1}\;\left[F(y) - F(x)\right]^{s-r-1}$$

$$.\left[1\text{-}F(y)\right]^{n-s},$$

$$K = \frac{n!}{(r\text{-}1)!(s-r-1)!(n-s)!}\;.$$

$$\therefore g_{r,s}(x,y) = K\;\frac{b^2}{\theta^2}\;x^{b-1}\;y^{b-1}\;e^{-\frac{x^b}{\theta}}\;e^{-\frac{y^b}{\theta}}$$

$$\cdot\left(1\text{-}\,e^{-\frac{x^b}{\theta}}\right)^{r-1}\left(e^{-\frac{x^b}{\theta}} - e^{-\frac{y^b}{\theta}}\right)^{s-r-1} e^{-\frac{y^b}{\theta}(n-s)}$$

$$= K\;\frac{b^2}{\theta^2}\;x^{b-1}\;y^{b-1}\;\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r\text{-}1}{i}(-1)^i\;e^{-\frac{x^b}{\theta}i}$$

$$\cdot\, e^{-\frac{y^b(n-s)}{\theta}}\;e^{-\frac{x^b}{\theta}}\;e^{-\frac{y^b}{\theta}}\;\sum_{j=0}^{s\text{-}r\text{-}1}\binom{s\text{-}r\text{-}1}{j}(\text{-}1)^j\;e^{-\frac{y^b}{\theta}j}\quad e^{-\frac{x^b}{\theta}(s-r-j-1)}$$

$$= K\;\frac{b^2}{\theta^2}\;x^{b-1}\;y^{b-1}\;\sum_{i=0}^{r-1}\;\sum_{j=0}^{s-r-1}\;C_{ij}\quad e^{-\frac{x^{b(i+s-r-j-1+1)}}{\theta}}$$

$$\cdot\, e^{-\frac{y^{b(j+n-s+1)}}{\theta}},$$

حيث :

$$C_{ij} = \binom{s-r-1}{j}\binom{r-1}{i}(-1)^{i+j}$$

$$\therefore g_{r,s}(x,y) = K\frac{b^2}{\theta^2}\;x^{b-1}\;y^{b-1}\;\sum_{i=0}^{r\text{-}1}\;\sum_{j=0}^{s\text{-}r\text{-}1}\;C_{ij}\;.\;e^{-\frac{x^b}{\theta}(s-r-j+i)}\,.\,e^{-\frac{y^{b(j+1+n-s)}}{\theta}}$$

ليكن:

$$A = s\text{ - }r\text{ - }j + i\quad,\quad a = j + 1 + n\text{ - }s$$

$$g_{r,s}(x,y) = K\frac{b^2}{\theta^2}\;x^{b-1}\;y^{b-1}\;\sum_{i=0}^{r\text{-}1}\;\sum_{j=0}^{s\text{-}r\text{-}1}\;C_{ij}$$

$$\cdot\; e^{-\frac{\left[Ax^b + ay^b\right]}{\theta}}$$

ليكن :

$$z = \frac{x}{y} \quad , \quad y = y$$
$$\therefore x = y\, z$$

دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z هى :

$$g(z) = \int_0^\infty |\, y \,|\; g_{r,s}(zy, y)dy$$
$$= \int_0^\infty \frac{K\, b^2}{\theta^2} (z\, y)^{b-1} y^{b-1} \,|\, y \,|\, \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij}$$
$$\cdot \exp\left[-\frac{1}{\theta}\left[A(zy)^b + ay^b\right]\right] dy$$
$$= \frac{b^2 K}{\theta^2} z^{b-1} \int_0^\infty y^{2b-1} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij}$$
$$\cdot \exp\left[-\frac{y^b}{\theta}\left(Az^b + a\right)\right] dy \qquad (٧٠٦)$$
$$= \frac{b^2 K}{\theta^2} z^{b-1} \int_0^\infty y^{2b-1} \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij}$$
$$\cdot \exp\left[-\frac{y^b A}{\theta}\left(z^b + \rho\right)\right] dy$$

حيث :

$$\rho = \frac{a}{A},$$
$$b > 1 .$$

للحصول على أقصر $100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة نتبع الآتي :

ليكن :

$$\boxed{U = -\, b \ln Z} \, ,$$

فإن داله كثافة الاحتمال للمتغير U نحصل عليها من (٧٠٦) كالتالى:

$$f_U(u) = K\, e^{-u} \sum_{j=0}^{s-r-1} \sum_{i=0}^{r-1} C_{ij} \qquad (٨٠٦)$$
$$\cdot A^{-2}\left[\rho + \exp\,(u)\right]^{-2} \quad , \; u > 0 .$$

الجمله الاحتمالية التالية:

$$P\left(u_0 < U < u_1\right) = 1 - \alpha$$

تحول إلى :

$$P(u_0 < -b\ \ln Z < u_1) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{u_0}{\ln Z} < -b < \frac{u_1}{\ln Z}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\frac{u_1}{-\ln Z} < b < \frac{u_0}{-\ln Z}\right) = 1-\alpha$$

وعلى ذلك $100(1-\alpha)\%$ فتره ثقه تكون كالتالى:

الحد الادنى ، الحد الاعلى

$$\left(\frac{u_1}{-\ln Z}\ ,\ \frac{u_0}{-\ln Z}\right)$$

$$,\quad 0 < Z < 1$$

اسلوب إيجاد أقصر فترة ثقة ذات جانبين يمكن ان يختزل الى حل المعادلتين التاليين آنيا :

$$f_U(u_0) = f_U(u_1),$$

$$\int_{u_0}^{u_1} f_U(u)du = 1-\alpha, \qquad (٩٠٦)$$

حيث $f_U(u_0)$ كما في (٨٠٦).

الآن أقصر فترة ثقة ذات جانبين لـــ b هي:

$\left(\frac{u_1}{-\ln Z}\ ,\ \frac{u_0}{-\ln Z}\right)$ حيث u_0, u_1 يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين التاليين آنيا:

$$K\sum_{j=0}^{s-r-1}\sum_{i=0}^{r-1} C_{ij}\ A^{-2}\ \exp(-u_0)\ [\rho+\exp(-u_0)]^{-2}$$

$$= K\sum_{j=0}^{s-r-1}\sum_{i=0}^{r-1} C_{ij}\ A^{-2}\ \exp(-u_1)\ [\rho+\exp(-u_1)]^{-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{s-r-1}\sum_{i=0}^{r-1} C_{ij}\ A^{-2}\left[\frac{\exp(-u_0)}{[\rho+\exp(-u_0)]^2} - \frac{\exp(u_1)}{[\rho+\exp(-u_1)]^2}\right] = 0\ ,$$

$$\int_{u_0}^{u_1} f_U(u)du = 1-\alpha$$

$$\therefore K\int_{u_0}^{u_1}\sum_{j=1}^{s-r-1}\sum_{i=1}^{r-1} C_{ij}\ \ A^{-2}$$

$$.\ \exp\{-u\}\{\rho+\exp(-u)\}^{-2} du = 1-\alpha$$

$$e^{-u} = y$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} A^{-2} \int_{e^{-u_1}}^{e^{-u_0}} (\rho + y)^{-2} dy$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} A^{-2} \quad \frac{(\rho+y)^{-1}}{-1} \Bigg|_{e^{-u_1}}^{e^{-u_0}}$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} A^{-2} \quad \frac{\left(\rho+e^{-u_0}\right)^{-1} - \left(\rho + e^{-u_1}\right)^{-1}}{-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} A^{-2} \quad \left[\left(\rho+e^{-u_1}\right)^{-1} - \left(\rho+e^{-u_0}\right)^{-1}\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} A^{-2} \quad \left[\frac{e^{-u_0} - e^{-u_1}}{\left(\rho+e^{-u_0}\right)\left(\rho+e^{-u_1}\right)}\right]$$

$$= \left[\exp[-u_0] - \exp(-u_1)\right] \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-r-1} C_{ij} \, A^{-2}$$

$$\cdot\left[\left\{\rho + \exp(-u_0)\right\} \; \left\{\rho+\exp(-u_1)\right\}\right]^{-1} = \frac{1-\alpha}{K}.$$

هذا ويتم حل المعادلات السابقة بإستخدام الحاسب الآلي.

الباب السابع

الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية مستقلة وغير متطابقة التوزيع

نشأت فكرة الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية غير متطابقة التوزيع منذ عام ١٩٦٥ حيث تم التوصل الى بعض النتائج الخاصه بها وذلك بالاعتماد على حسابات جبرية معقدة، ولا زال هناك الكثير من الصعوبات في التوصل إلى علاقات واضحة في جوانب متعددة. هذا وقد عرض بعض الباحثين ما توصلوا إليه من حيث ذكر صور دوال الكثافة ودوال التوزيع للإحصاءات الترتيبية من متغيرات مستقلة متصلة غير متطابقة التوزيع ثم التعبير عن تلك الصورة في شكل Permanent او ما يسمى دائم ، إذا إن تلك الصورة مكنت الباحثين من استخدام بعض خواص Permanent لإثبات بعض العلاقات التكرارية لدوال الكثافة ودوال التوزيع.

(٧-١) مفاهيم أساسية:

(٧-١-١) الدائم Permanent :

هو محدد لمصفوفه مربعه فيما عدا أن كل الاشارات عند فكه موجبة وسوف نرمز له بالرمز:

$$\text{per}|\ | = {}^{+}|\ |^{+}.$$

فعلى سبيل المثال:

$$^{+}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^{+} = 2,$$

$$^{+}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{+} = 3! = 6,$$

$$^{+}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}^{+} = n!,$$

$$^{+}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}^{+} = ad + bc.$$

والدائم له الخواص الآتية:

١- $$\text{per}|A| = \text{per}|A^{T}|$$

حيث A^{T} هي المنقول للمصفوفة A .

٢- لا تتغير قيمة دائم المصفوفة بتبديل صفوفها أو أعمدتها .

ولمزيد من المعلومات عن الدائم يمكن الرجوع إلى Minc (1983) , (1987) .

(٧-١-٢) دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ n من الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات مستقلة وغير متطابقة التوزيع:

The Probability Density Function of n Order Statistics for Independent and Non Identically Distributed Variables:

لتكن $X_1,\dots,X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة وغير متطابقة التوزيع بدوال كثافة احتمالية $f_1(x),\dots,f_n(x)$، ودوال توزيع تجميعيه $F_1(x),\dots,F_n(x)$ على التوالي وكانت $Y_1<Y_2<\dots<Y_n$ الإحصاءات الترتيبية التي نحصل عليها بترتيب المتغيرات ترتيباً تصاعدياً، وعلي ذلك فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ n من الإحصاءات الترتيبية لمتغيرات مستقلة وغير متطابقة التوزيع تعطى بالصورة التالية :

$$g(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{p} f_{i_1}(x_1)f_{i_2}(x_2)\dots f_{i_n}(x_n) \quad (١٠٧)$$

حيث $\sum_p$ مجموع كل التبديلات على $i_1,i_2,\dots,i_n$ وعددها $n!$. فعلى سبيل المثال عندما $n=3$ فإن داله كثافة الاحتمال للمتغيرات Y_1,Y_2,Y_3 هي:

$$\begin{aligned}g(x_1,x_2,x_3)&=f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)+f_1(x_1)f_3(x_2)f_2(x_3)\\&+f_2(x_1)f_1(x_2)f_3(x_3)+f_2(x_1)f_3(x_2)f_1(x_3)\\&+f_3(x_1)f_1(x_2)f_2(x_3)+f_3(x_1)f_2(x_2)f_1(x_3).\end{aligned}$$

وقد عبر Vughan and Venables (1972) عن (١٠٧) في صورة دائم على النحو التالى:

$$g(x_1,x_2,\dots,x_n)={}^{+}\begin{vmatrix}f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n)\end{vmatrix}^{+}$$

فعلي سبيل المثال إذا كانت $X_1,X_2,\dots,X_n$ متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الاسي بدوال كثافة احتمالية:

$$f_i(x)=\frac{1}{\theta_i}e^{-\frac{x}{\theta_i}},\ x\ge 0,\theta_i>0,$$

ودوال توزيع تجميعيه:

$$F_i(x)=1-e^{-\frac{x}{\theta_i}},$$

فإن داله كثافة الاحتمال المشتركه لــ n من الاحصاء الترتيبية لمتغيرات مستقله وغير متطابقة التوزيع هي:

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{vmatrix} \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & \cdots & \frac{1}{\theta_n}e^{-\frac{x_1}{\theta_n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x_n}{\theta_1}} & \cdots & \frac{1}{\theta_n}e^{-\frac{x_n}{\theta_n}} \end{vmatrix}^{+}$$

مثال (٧-١-١):

لتكن المتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_4$ تتبع توزيعات أسيه بدوال كثافة احتماليه:

$$f_i(x)=\frac{1}{\theta_i}e^{-\frac{x}{\theta_i}},\ \ x>0\,,\theta_i>0\,,$$

ودوال توزيع تجميعية:

$$F_i(x)=1-e^{-\frac{x}{\theta_i}},\ \ x>0\,,\theta_i>0\,.$$

فإن داله كثافة الاحتمال المشتركه للمتغيرات $Y_1, Y_2, \ldots, Y_4$ هي:

$$g(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{vmatrix} \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3}e^{-\frac{x_1}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4}e^{-\frac{x_1}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3}e^{-\frac{x_2}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4}e^{-\frac{x_2}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x_3}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x_3}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_3}e^{-\frac{x_3}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4}e^{-\frac{x_3}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x_4}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x_4}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3}e^{-\frac{x_4}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4}e^{-\frac{x_4}{\theta_4}} \end{vmatrix}^{+}$$

(٧-١-٣): دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي من الرتبه r (Y_r):

$$g_r(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) & \cdots & F_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & \cdots & F_n(x) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \cdots & 1-F_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \cdots & 1-F_n(x) \end{vmatrix}^{+} \begin{matrix} \} \text{(r-1) rows} \\ \leftarrow \text{(1) row} \\ \} \text{(n-r) rows} \end{matrix}$$

(٢٠٧)

مثال (٧-١-٢):

لتكن $X_1, X_2, ..., X_n$ متغيرات عشوائية تتبع الأسى بدوال كثافة احتمالية:

$$f_i(x) = \frac{1}{\theta_i} e^{-\frac{x}{\theta_i}}, \quad x \geq 0, \theta_i > 0$$

ودوال توزيع تجميعيه:

$$F_i(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta_i}}, \quad x \geq 0, \theta_i > 0 .$$

فإن داله كثافة الاحتمال للاحصاء الترتيبي من الرتبه r من توزيعات اسيه تكون علي الصورة التالية:

$$g_r(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \cdots & 1-e^{-\frac{x}{\theta_n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \cdots & 1-e^{-\frac{x}{\theta_n}} \\ \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \cdots & \frac{1}{\theta_n}e^{-\frac{x}{\theta_n}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \cdots & e^{-\frac{x}{\theta_n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \cdots & e^{-\frac{x}{\theta_n}} \end{vmatrix}^{+} \begin{matrix} \} \text{(r-1) rows} \\ \leftarrow \text{(1) row} \\ \} \text{(n-r) rows} \end{matrix}$$

وبوضع $r+1$ بدلا من r في (٢٠٧) نحصل على داله كثافة الاحتمال للاحصاء الترتيبى Y_{r+1} كالتالى:

$$g_{r+1}(x)=\frac{1}{r!(n-r-1)!}\,{}^{+}\begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) & \cdots & F_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & \cdots & F_n(x) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \cdots & 1-F_n(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \cdots & 1-F_n(x) \end{vmatrix}^{+} \begin{matrix} \text{(r) rows} \\ \\ \text{(1) row} \\ \\ \text{(n-r-1) rows} \end{matrix}$$

(٧-١-٤) دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبى الأول (Y_1):

$$g_1(x)=\frac{1}{(n-1)!}\,{}^{+}\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \cdots & 1-F_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-F_1(x) & 1-F_2(x) & \cdots & 1-F_n(x) \end{vmatrix}^{+} \begin{matrix} \text{1 row} \\ \\ \text{n-1 rows} \end{matrix}$$

(٧-١-٥) دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبى من الرتبه n (Y_n):

$$g_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\,{}^{+}\begin{vmatrix} F_1(x) & F_2(x) & \cdots & F_n(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & \cdots & F_n(x) \\ f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \end{vmatrix}^{+} \begin{matrix} \text{(n-1) rows} \\ \\ \leftarrow \text{(1) row} \end{matrix}$$

للمثال (٧-١-٢) ويوضح $r=1$, $n=4$ فإن داله كثافه الاحتمال للاحصاء الترتيبي Y_1 هي :

$$g_1(x)=\frac{1}{3!}=\,{}^{+}\begin{vmatrix} \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3}e^{-\frac{x}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4}e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \end{vmatrix}^{+}$$

وداله كثافه الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_2 هي:

$$g_2(x)=\frac{1}{2!}=\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3}e^{-\frac{x}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4}e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \end{vmatrix}^{+}_{+}$$

وداله كثافه الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_3 هي:

$$g_3(x)=\frac{1}{2!}=\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3}e^{-\frac{x}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4}e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_4}} \end{vmatrix}^{+}_{+}$$

وداله كثافه الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_4 هي:

$$g_4(x)=\frac{1}{3!}=\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3}e^{-\frac{x}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4}e^{-\frac{x}{\theta_4}} \end{vmatrix}^{+}_{+}$$

(٧-١-٦) دالة كثافة الاحتمال المشتركة لإحصاءين ترتيبيين Y_{k_1}, Y_{k_2} :

وقد وضعت هذه الداله من قبل Vughan and Venables (1972) في صورة دائم كالتالى:

$$(1 \le k_1 < k_2 \le n)$$

$$g_{k_1,k_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{(k_1-1)!(k_2-k_1-1)!(n-k_2)!} \times$$

$$\begin{vmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1(x_1) & F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_1) \\ f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ F_1(x_2)-F_1(x_1) & F_2(x_2)-F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_2)-F_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1(x_2)-F_1(x_1) & F_2(x_2)-F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_2)-F_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & & f_n(x_2) \\ 1-F_1(x_2) & 1-F_2(x_2) & \cdots & 1-F_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-F_1(x_1) & 1-F_2(x_2) & \cdots & 1-F_n(x_n) \end{vmatrix}^{+} \begin{matrix} \left.\right\} (k_1-1)\text{rows} \\ \leftarrow 1\text{ row} \\ \left.\right\} (k_2-k_1-1)\text{ rows} \\ \leftarrow 1\text{ row} \\ \left.\right\} (n-k_2)\text{ rows} \end{matrix}$$

(٣٠٧)

تحت فرض التوزيع الاسى فإن دالة التوزيع المشتركة للاحصاءين الترتيبيين Y_1 , Y_4 و $n=4$ هي:

$$g_{1,4}(x_1,x_2) = \begin{vmatrix} \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3}e^{-\frac{x_1}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4}e^{-\frac{x_1}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x_2}{\theta_1}}-e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_2}}-e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_3}}-e^{-\frac{x_1}{\theta_3}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_4}}-e^{-\frac{x_1}{\theta_4}} \\ e^{-\frac{x_2}{\theta_1}}-e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_2}}-e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_3}}-e^{-\frac{x_1}{\theta_3}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_4}}-e^{-\frac{x_1}{\theta_4}} \\ \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} & \frac{1}{\theta_3}e^{-\frac{x_2}{\theta_3}} & \frac{1}{\theta_4}e^{-\frac{x_2}{\theta_4}} \end{vmatrix}^{+}$$

حالات خاصه:

أ- دالة كثافة الاحتمال المشتركة للاحصاءين الترتيبيين Y_1 , Y_n

Joint Probability Density Function of the First and the Last Order Statistics (Y_1 , Y_n):

بوضع $k_1 = 1 , k_2 = n$ في (٣٠٧) نحصل على:

$$g_{1,n}(x_1,x_2)=[(n-2)!]^{-1}\times$$

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ F_1(x_2)-F_1(x_1) & F_2(x_2)-F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_2)-F_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_1(x_2)-F_1(x_1) & F_2(x_2)-F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_2)-F_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \end{vmatrix}^{+} \begin{matrix} \leftarrow \text{1 row} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{(n-2) rows} \\ \leftarrow \text{1 row} \end{matrix}$$

(ب) دالة كثافة الاحتمال المشتركة للاحصاءيين الترتيبيين المتتاليتين $Y_{k_1} , Y_{k_{1+1}}$

Joint Probability Density Function of $\left(Y_{k_1} , Y_{k_{1+1}}\right)$:

بوضع $k_2 = k_1 + 1$ في (٣٠٧) نحصل على:

$$g_{k_1,k_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{(k_1-1)!(n-k_1-1)!}\times$$

$$\begin{vmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_1(x_1) & F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_1) \\ f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & & f_n(x_2) \\ 1-F_1(x_2) & 1-F_2(x_2) & \cdots & 1-F_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-F_1(x_2) & 1-F_2(x_2) & \cdots & 1-F_n(x_2) \end{vmatrix}^{+} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} (k_1\text{-1) rows} \\ \leftarrow \text{(1) row} \\ \leftarrow \text{(1) row} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} (n\text{-}k_1\text{-1) rows} \end{matrix}$$

مثال (٧-١-٣):

اوجد داله كثافة الاحتمال لاحصاءين ترتيبيين متتاليين $Y_{k_1} , Y_{k_{1+1}}$ تحت فرض التوزيع الأسي.

الحـــل:

من (ب) فإن :

$$g_{k_1,k_{1+1}}(x_1,x_2)=\frac{1}{(k_1-1)!(n-k_1-1)!}\times$$

$$\left|\begin{matrix} 1-e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & \cdots & 1-e^{-\frac{x_1}{\theta_n}} \\ 1-e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & \cdots & 1-e^{-\frac{x_1}{\theta_n}} \\ \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x_1}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x_1}{\theta_2}} & \cdots & \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x_1}{\theta_n}} \\ \frac{1}{\theta_1}e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} & \frac{1}{\theta_2}e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} & \cdots & \frac{1}{\theta_4}e^{-\frac{x_2}{\theta_n}} \\ e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} & \cdots & e^{-\frac{x_2}{\theta_n}} \\ \vdots & & & \\ e^{-\frac{x_2}{\theta_1}} & e^{-\frac{x_2}{\theta_2}} & \cdots & e^{-\frac{x_2}{\theta_n}} \end{matrix}\right|^{+} \begin{matrix} \left.\right\} (k_1-1) \text{ rows} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \\ \left.\right\} (n-k_1-1) \text{ rows} \end{matrix}$$

(٧-١-٧) دالة كثافة الاحتمال المشتركة لـ p من الإحصاءات الترتيبية من عينة حجمها n:

$$g_{k_1,k_2,\ldots,k_p}(x_1,x_2,\ldots,x_p)=\frac{1}{(k_1-1)!(k_2-k_1-1)!(k_3-k_2-1)!\ldots(k_p-k_{p-1}-1)!(n-k_p)!}\times$$

$$^{+}\begin{vmatrix}
F_1(x_1) & F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_1)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
F_1(x_1) & F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_1)\\
f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1)\\
F_1(x_2)-F_1(x_1) & F_2(x_2)-F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_2)-F_n(x_1)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
F_1(x_2)-F_1(x_1) & F_2(x_2)-F_2(x_1) & \cdots & F_n(x_2)-F_n(x_1)\\
f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2)\\
F_1(x_3)-F_1(x_2) & F_2(x_3)-F_2(x_2) & \cdots & F_n(x_3)-F_n(x_2)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
F_1(x_3)-F_1(x_2) & F_2(x_3)-F_2(x_2) & \cdots & F_n(x_3)-F_n(x_2)\\
f_1(x_3) & f_2(x_3) & \cdots & f_n(x_3)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
F_1(x_p)-F_1(x_{p-1}) & F_2(x_p)-F_2(x_{p-1}) & \cdots & F_n(x_p)-F_n(x_{p-1})\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
F_1(x_p)-F_1(x_{p-1}) & F_2(x_p)-F_2(x_{p-1}) & \cdots & F_n(x_p)-F_n(x_{p-1})\\
f_1(x_p) & f_2(x_p) & \cdots & f_n(x_p)\\
1-F_1(x_p) & 1-F_2(x_p) & \cdots & 1-F_n(x_p)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
1-F_1(x_p) & 1-F_2(x_p) & \cdots & 1-F_n(x_p)
\end{vmatrix}^{+}
\begin{matrix}
\left.\right\} (k_1-1)\text{rows}\\
\leftarrow 1\text{ row}\\
\left.\right\} (k_2-k_1-1)\text{rows}\\
\leftarrow 1\text{ row}\\
\left.\right\} (k_3-k_2-1)\text{rows}\\
\leftarrow 1\text{ row}\\
\left.\right\} (k_p-k_{p-1}-1)\text{rows}\\
\leftarrow 1\text{ row}\\
\left.\right\} (n-k_p)\text{rows}
\end{matrix}$$

مثال (٧-١-٤):

إذا كانت المتغيرات المستقله تتبع توزيع وايبل على الشكل التالى:

$$f_i(x)=\alpha_i\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_i x^{\beta}} \quad , \ x\geq 0 \, , \alpha_i \ , \beta>0,$$

ودوال توزيع تجميعيه

$$F_i(x)=1-e^{-\alpha_i x^{\beta}} \quad , \ x\geq 0 \, , \alpha_i \ , \beta>0,$$

فإن دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء الترتيبى من الرتبه r (Y_r) تأخذ الشكل التالى:

$$g_r(x)=\frac{1}{(r-1)!(n-r)!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} & \cdots & 1-e^{-\alpha_n x^\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1-e^{-\alpha_1 x^\beta} & 1-e^{-\alpha_2 x^\beta} & \cdots & 1-e^{-\alpha_n x^\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x^\beta} & \alpha_2\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x^\beta} & \cdots & \alpha_n\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_n x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & \cdots & e^{-\alpha_n x^\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & \cdots & e^{-\alpha_n x^\beta} \end{vmatrix}^{+}\begin{matrix} \left.\right\} \text{(r-1) rows} \\ \leftarrow \text{1 row} \\ \left.\right\} \text{(n-r) rows} \end{matrix}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_1 عندما $n = 4$ هي:

$$g_1(x)=\frac{1}{3!}\times$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x^\beta} & \alpha_2\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x^\beta} & \alpha_3\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_3 x^\beta} & \alpha_4\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \end{vmatrix}^{+}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_2 عندما $n = 4$ هي:

$$g_2(x)=\frac{1}{2!}\times$$

$$\begin{vmatrix} \left\{1-e^{-\alpha_1 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_2 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_4 x^\beta}\right\} \\ \alpha_1\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x^\beta} & \alpha_2\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x^\beta} & \alpha_3\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_3 x^\beta} & \alpha_4\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \end{vmatrix}^{+}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_3 عندما $n = 4$ هي:

$$g_3(x) = \frac{1}{2!}$$

$$\begin{vmatrix} \left\{1-e^{-\alpha_1 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_2 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_4 x^\beta}\right\} \\ \left\{1-e^{-\alpha_1 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_2 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_4 x^\beta}\right\} \\ \alpha_1\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x^\beta} & \alpha_2\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x^\beta} & \alpha_3\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_3 x^\beta} & \alpha_4\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_4 x^\beta} \\ e^{-\alpha_1 x^\beta} & e^{-\alpha_2 x^\beta} & e^{-\alpha_3 x^\beta} & e^{-\alpha_4 x^\beta} \end{vmatrix}^+$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_4 عندما $n = 4$ هي:

$$g_4(x) = \frac{1}{3!}$$

$$\begin{vmatrix} \left\{1-e^{-\alpha_1 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_2 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_4 x^\beta}\right\} \\ \left\{1-e^{-\alpha_1 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_2 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_4 x^\beta}\right\} \\ \left\{1-e^{-\alpha_1 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_2 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_3 x^\beta}\right\} & \left\{1-e^{-\alpha_4 x^\beta}\right\} \\ \alpha_1\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x^\beta} & \alpha_2\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x^\beta} & \alpha_3\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_3 x^\beta} & \alpha_4\beta x^{\beta-1}e^{-\alpha_4 x^\beta} \end{vmatrix}^+$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاءين ترتيبيين Y_{k_1}, Y_{k_2} هي:

$$g_{k_1,k_2}(x_1,x_2)=\left[(k_1-1)!(k_2-k_1-1)!(n-k_2)!\right]^{-1} x$$

$$^{+}\left|\begin{array}{cccc}
1-e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & 1-e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \cdots & 1-e^{-\alpha_n x_1^{\beta}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1-e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & 1-e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \cdots & 1-e^{-\alpha_n x_1^{\beta}} \\
\alpha_1\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & \alpha_2\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \cdots & \alpha_n\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_n x_1^{\beta}} \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \cdots & e^{-\alpha_n x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_n x_1^{\beta}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \cdots & e^{-\alpha_n x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_n x_1^{\beta}} \\
\alpha_1\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}} & \alpha_2\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}} & \cdots & \alpha_n\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_n x_2^{\beta}} \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}} & \cdots & e^{-\alpha_n x_2^{\beta}} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}} & \cdots & e^{-\alpha_n x_2^{\beta}}
\end{array}\right|^{+}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}(k_1-1)\text{rows} \\
\leftarrow 1\text{ row} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}(k_2-k_1-1)\text{rows} \\
\leftarrow 1\text{ row} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}(n-k_2)\text{rows}
\end{array}$$

ودالة كثافة الاحتمال لاحصاءين ترتيبين متتاليين Y_{k_1}, Y_{k_1+1} هي:

$$g_{k_1,k_{1+1}}(x_1,x_2)=\left[(k_1-1)!(n-k_1-1)!\right]^{-1}\times$$

$$^{+}\left|\begin{array}{cccc}
1-e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & 1-e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \cdots & 1-e^{-\alpha_n x_1^{\beta}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
1-e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & 1-e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \cdots & 1-e^{-\alpha_n x_1^{\beta}} \\
\alpha_1\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & \alpha_2\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \cdots & \alpha_n\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_n x_1^{\beta}} \\
\alpha_1\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}} & \alpha_2\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}} & \cdots & \alpha_n\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_n x_2^{\beta}} \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}} & \cdots & e^{-\alpha_n x_2^{\beta}} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}} & \cdots & e^{-\alpha_n x_2^{\beta}}
\end{array}\right|^{+}
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}(k_1-1)\text{rows} \\
\leftarrow 1\text{ row} \\
\leftarrow 1\text{ row} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}(n-k_1-1)\text{rows}
\end{array}$$

ودالة كثافة الاحتمال المشتركة للاحصاءين الترتيبين Y_n, Y_1 هي:

$$g_{1,n}(x_1,x_2)=\left[(n-2)!\right]^{-1}\times$$

$$^{+}\left|\begin{array}{cccc}
\alpha_1\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & \alpha_2\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \cdots & \alpha_n\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_n x_1^{\beta}} \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \cdots & e^{-\alpha_n x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_n x_1^{\beta}} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \cdots & e^{-\alpha_n x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_n x_1^{\beta}} \\
\alpha_1\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}} & \alpha_2\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}} & \cdots & \alpha_n\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_n x_2^{\beta}}
\end{array}\right|^{+}
\begin{array}{l}
\leftarrow 1\text{ row} \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}(n-2)\text{ rows} \\
\leftarrow 1\text{ row}
\end{array}$$

ودالة كثافة الاحتمال المشتركة للاحصاءين الترتيبين Y_2, Y_1 و $n=4$ هي:

$$g_{1,2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2!}\times$$

$$^{+}\left|\begin{array}{cccc}
\alpha_1\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & \alpha_2\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \alpha_3\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_3 x_1^{\beta}} & \alpha_4\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_4 x_1^{\beta}} \\
\alpha_1\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}} & \alpha_2\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}} & \alpha_3\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_3 x_2^{\beta}} & \alpha_4\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_4 x_2^{\beta}} \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}} & e^{-\alpha_3 x_2^{\beta}} & e^{-\alpha_4 x_2^{\beta}} \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}} & e^{-\alpha_3 x_2^{\beta}} & e^{-\alpha_4 x_2^{\beta}}
\end{array}\right|^{+}$$

دالة كثافة الاحتمال المشتركة للاحصاءين الترتيبين Y_1, Y_4 و $n=4$ هي:

$$g_{1,4}(x_1,x_2)=\left[2!\right]^{-1}\times$$

$$^{+}\left|\begin{array}{cccc}
\alpha_1\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & \alpha_2\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & \alpha_3\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_3 x_1^{\beta}} & \alpha_4\beta x_1^{\beta-1}e^{-\alpha_4 x_1^{\beta}} \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & e^{-\alpha_3 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_3 x_1^{\beta}} & e^{-\alpha_4 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_4 x_1^{\beta}} \\
e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_1 x_1^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_2 x_1^{\beta}} & e^{-\alpha_3 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_3 x_1^{\beta}} & e^{-\alpha_4 x_2^{\beta}}-e^{-\alpha_4 x_1^{\beta}} \\
\alpha_1\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_1 x_2^{\beta}} & \alpha_2\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_2 x_2^{\beta}} & \alpha_3\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_3 x_2^{\beta}} & \alpha_4\beta x_2^{\beta-1}e^{-\alpha_4 x_2^{\beta}}
\end{array}\right|^{+}$$

مثال (٧-١-٥):

إذا كانت دالة كثافة الاحتمال لتوزيع باريتو هي:

$$f_i(x) = v_i\ \bar{e}^{(v_i+1)} \quad , \quad x \geq 1 \ , \ v_i > 0.$$

ودالة التوزيع التجميعى علي الشكل :

$$F_i(x) = 1 - x^{-v_i} \ , \quad x \geq 1 \ , \ v_i > 0, \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

فإن داله كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي من الرتبه r (Y_r) هي:

$$g_r(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \times \begin{vmatrix} \{1-x^{-v_1}\} & \{1-x^{-v_2}\} & \cdots & \{1-x^{-v_n}\} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \{1-x^{-v_1}\} & \{1-x^{-v_2}\} & \cdots & \{1-x^{-v_n}\} \\ v_1 x^{-(v_1+1)} & v_2 x^{-(v_2+1)} & \cdots & v_n x^{-(v_n+1)} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & \cdots & x^{-v_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & \cdots & x^{-v_n} \end{vmatrix}^{+} \begin{matrix} \left.\right\} r-1 \text{ rows} \\ \leftarrow 1 \text{ row} \\ \left.\right\} n-r \text{ rows} \end{matrix}$$

عندما $n = 4$, $r = 1$ فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبى Y_1 هي:

$$g_1(x) = \frac{1}{3!} \times \begin{vmatrix} v_1 x^{-(v_1+1)} & v_2 x^{-(v_2+1)} & v_3 x^{-(v_3+1)} & v_4 x^{-(v_4+1)} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & x^{-v_3} & x^{-v_4} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & x^{-v_3} & x^{-v_4} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & x^{-v_3} & x^{-v_4} \end{vmatrix}^{+}$$

ودالة كثافة الاحتمال للاحصاء الترتيبى Y_2 عندما $n = 4$ هي:

$$g_2(x) = \frac{1}{2!} \times \begin{vmatrix} \{1-x^{-v_1}\} & \{1-x^{-v_2}\} & \{1-x^{-v_3}\} & \{1-x^{-v_4}\} \\ v_1 x^{-(v_1+1)} & v_2 x^{-(v_2+1)} & v_3 x^{-(v_3+1)} & v_4 x^{-(v_4+1)} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & x^{-v_3} & x^{-v_4} \\ x^{-v_1} & x^{-v_2} & x^{-v_3} & x^{-v_4} \end{vmatrix}^{+}$$

مثال (٧-١-٦):

لتكن المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$ تتبع توزيع ايرلنج Erlang Distribution بدوال كثافة احتماليه

$$f_i(x) = \frac{\lambda_i^m}{\Gamma(m)}\, x^{m-1}\, e^{-\lambda_i x} \quad , x \geq 0 , \lambda_i \geq 0,$$

ودوال توزيع تجميعية:

$$F_i(x) = 1 - \sum_{t=0}^{m-1} \frac{(\lambda_i x)^t}{t!}\, e^{-\lambda_i x} \quad , x \geq 0 , \lambda_i \geq 0,$$

فإن دالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي من الرتبه $r\ (Y_r)$ هي:

$$g_r(x) = \frac{1}{(r-1)!(n-r)!} \times$$

$$\begin{vmatrix} \left(1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x}\right) & \left(1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x}\right) & \cdots & \left(1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_n x)^t}{t!}e^{-\lambda_n x}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \left(1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x}\right) & \left(1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x}\right) & \cdots & \left(1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_n x)^t}{t!}e^{-\lambda_n x}\right) \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_1 x} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_2 x} & \cdots & \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_n x} \\ \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x} & \cdots & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_n x)^t}{t!}e^{-\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x} & \cdots & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_n x)^t}{t!}e^{-\lambda_n x} \end{vmatrix}^{+}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_1 عندما $n = 3$ هي:

$$g_1(x)=\frac{1}{2!}\times\begin{vmatrix}\frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_1 x} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_2 x} & \frac{\lambda_3^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_3 x}\\ \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_3 x)^t}{t!}e^{-\lambda_3 x}\\ \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_3 x)^t}{t!}e^{-\lambda_3 x}\end{vmatrix}^{+}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_2 هي:

$$g_2(x)=\begin{vmatrix}\left(1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x}\right) & \left(\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x}\right) & \left(\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_3 x)^t}{t!}e^{-\lambda_3 x}\right)\\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_1 x} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_2 x} & \frac{\lambda_3^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_3 x}\\ \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_3 x)^t}{t!}e^{-\lambda_3 x}\end{vmatrix}^{+}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاء الترتيبي Y_3 هي و $n=3$:

$$g_3(x)=\frac{1}{2!}x\begin{vmatrix}\left(1-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x}\right) & \left(1-\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x}\right) & \left(1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_3 x)^t}{t!}e^{-\lambda_3 x}\right)\\ \left(1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x}\right) & \left(1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x}\right) & \left(1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_3 x)^t}{t!}e^{-\lambda_3 x}\right)\\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_1 x} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_2 x} & \frac{\lambda_3^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_3 x}\end{vmatrix}^{+}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصائين الترتيبين Y_{k_1}, Y_{k_2} هي:

$$g_{k_1,k_2}(x_1,x_2)=\left[(k_1-1)!(k_2-k_1-1)!(n-k_2)!\right]^{-1}\times$$

$$\begin{vmatrix} \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_1x}\right\} & \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_2x}\right\} & \cdots & \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_1)^t}{t!}e^{-\lambda_nx}\right\} \\ \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_1x}\right\} & \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_2x}\right\} & \cdots & \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_1)^t}{t!}e^{-\lambda_nx}\right\} \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x_1^{m-1}e^{-\lambda_1x} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_2x_1} & \cdots & \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_nx_n} \\ \left\{\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_1x}-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_1x}\right\} & \left\{\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_2x}-\sum\limits_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_2x}\right\} & \cdots & \left\{\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_2)^t}{t!}e^{-\lambda_nx}-\sum\limits_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_1)^t}{t!}e^{-\lambda_nx}\right\} \\ \left\{\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_1x}-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_1x}\right\} & \left\{\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_2x}-\sum\limits_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_2x}\right\} & \cdots & \left\{\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_2)^t}{t!}e^{-\lambda_nx}-\sum\limits_{i=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_1)^t}{t!}e^{-\lambda_nx}\right\} \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_1x} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_2x_2} & \cdots & \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)}x^{m-1}e^{-\lambda_nx_2} \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_1x_2} & \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_2x_2} & \cdots & \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_2)^t}{t!}e^{-\lambda_nx_2} \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_1x_2} & \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_2x_2} & \cdots & \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_2)^t}{t!}e^{-\lambda_nx_2} \end{vmatrix}^{+}$$

ودالة كثافة الاحتمال لاحصاءين ترتيبين متتالين:

$$g_{k_1,k_2+1}(X_1,X_2)=\left[(k_1-1)!(n-k_1-1)!\right]^{-1}\times$$

$$\begin{vmatrix} \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_1x_1}\right\} & \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_2x_1}\right\} & \cdots & \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_1)^t}{t!}e^{-\lambda_nx_1}\right\} \\ \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_1x_1}\right\} & \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_2x_1}\right\} & \cdots & \left\{1-\sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_1)^t}{t!}e^{-\lambda_nx_1}\right\} \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x_1^{m-1}e^{-\lambda_1x_1} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x_1^{m-1}e^{-\lambda_2x_1} & \cdots & \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)}x_1^{m-1}e^{-\lambda_nx_1} \\ \frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x_2^{m-1}e^{-\lambda_1x_2} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x_2^{m-1}e^{-\lambda_2x_2} & \cdots & \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)}x_2^{m-1}e^{-\lambda_nx_2} \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_1x_2} & \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_2x_2} & \cdots & \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_2)^t}{t!}e^{-\lambda_nx_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_1x_2} & \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_2x_2} & \cdots & \sum\limits_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_nx_2)^t}{t!}e^{-\lambda_nx_2} \end{vmatrix}^{+} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} (k_1-1)\text{ rows} \\ \leftarrow 1\text{ row} \\ \leftarrow 1\text{ row} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} (n-k_1-1)\text{ rows} \end{matrix}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاءين الترتيبين الاول والاخير (Y_1, Y_n) هي:

$$g_{1,2}(x_1,x_2)=\left[(n-2)!\right]^{-1}\times$$

$$\begin{vmatrix}
\frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x_1^{m-1}e^{-\lambda_1 x_1} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x_1^{m-1}e^{-\lambda_2 x_1} & \cdots & \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)}x_1^{m-1}e^{-\lambda_n x_1} \\
\left\{\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x_2}-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x_1}\right\} & \left\{\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x_2}-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x_1}\right\} & \cdots & \left\{\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_n x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_n x_2}-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_n x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_n x_1}\right\} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\left\{\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x_2}-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x_1}\right\} & \left\{\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x_2}-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x_1}\right\} & \cdots & \left\{\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_n x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_n x_2}-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_n x_1)^t}{t!}e^{-\lambda_n x_1}\right\} \\
\frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x_2^{m-1}e^{-\lambda_1 x_2} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x_2^{m-1}e^{-\lambda_2 x_2} & \cdots & \frac{\lambda_n^m}{\Gamma(m)}x_2^{m-1}e^{-\lambda_n x_2}
\end{vmatrix}^{+}
\begin{matrix} \leftarrow \text{1 row} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{(n-2) rows} \\ \leftarrow \text{1 row} \end{matrix}$$

ودالة كثافة الاحتمال للإحصاءين الترتيبين (Y_2, Y_1) عند $n=4$ هي:

$$g_{1,2}(x_1,x_2)=\left[2!\right]^{-1}$$

$$\begin{vmatrix}
\frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x_1^{m-1}e^{-\lambda_1 x_1} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x_1^{m-1}e^{-\lambda_2 x_1} & \frac{\lambda_3^m}{\Gamma(m)}x_1^{m-1}e^{-\lambda_3 x_1} & \frac{\lambda_4^m}{\Gamma(m)}x_1^{m-1}e^{-\lambda_4 x_1} \\
\frac{\lambda_1^m}{\Gamma(m)}x_2^{m-1}e^{-\lambda_1 x_2} & \frac{\lambda_2^m}{\Gamma(m)}x_2^{m-1}e^{-\lambda_2 x_2} & \frac{\lambda_3^m}{\Gamma(m)}x_2^{m-1}e^{-\lambda_3 x_2} & \frac{\lambda_4^m}{\Gamma(m)}x_2^{m-1}e^{-\lambda_4 x_2} \\
\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_3 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_3 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_4 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_4 x_2} \\
\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_2 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_2 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_3 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_3 x_2} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_4 x_2)^t}{t!}e^{-\lambda_4 x_2}
\end{vmatrix}^{+}$$

(٧-١-٨) دالة التوزيع التجميعية للإحصاء الترتيبى من الرتبه r (Y_r):

$$F_{r:n}(x)=\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}\begin{vmatrix} F_1(x) & 1-F_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{F_n(x)}_{i} & \underbrace{1-F_n(x)}_{n-i} \end{vmatrix}^{+}, \quad -\infty < x < \infty \cdot$$

وعلى ذلك دالة التوزيع التجميعية للإحصاء الترتيبى من الرتبه الأولى (Y_1) هي:

$$F_{1:n}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}\;{}^{+}\left|\begin{matrix} F_1(x) & 1-F_n(x) \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{F_1(x)}_{i} & \underbrace{1-F_n(x)}_{n-i} \end{matrix}\right|^{+},\quad -\infty<x<\infty.$$

وبالتالي تكون دالة التوزيع التجميعى للإحصاء الترتيبي من الرتبه n (Y_n) هي:

$$F_{n:n}(x)=\frac{1}{n!}\;{}^{+}\left|\begin{matrix} F_1(x) \\ \vdots \\ \underbrace{F_n(x)}_{n} \end{matrix}\right|^{+},\quad -\infty<x<\infty$$

(أ) تحت فرض التوزيع الأسي:

دالة التوزيع التجميعى للإحصاء الترتيبى من الرتبه الاولى (Y_1) عندما $n=3$ هي:

$$F_{1:3}(x)=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i!(3-i)!}\;{}^{+}\left|\begin{matrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{i} & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{3-i} \end{matrix}\right|^{+}$$

$$=\frac{1}{2!}\;{}^{+}\left|\begin{matrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{1} & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{2} \end{matrix}\right|^{+}+\frac{1}{2}\;{}^{+}\left|\begin{matrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{2} & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{1} \end{matrix}\right|^{+}$$

$$+\frac{1}{3!}\,{}^{+}\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{3} & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{0} \end{vmatrix}^{+}$$

$$=\frac{1}{2!}\,{}^{+}\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix}^{+}+\frac{1}{2!}\,{}^{+}\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix}^{+}$$

$$+\frac{1}{3!}\,{}^{+}\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix}^{+}$$

ودالة التوزيع التجميعى للإحصاء الترتيبي Y_2 عندما $n = 3$ هي:

$$F_{2:3}(x)=\sum_{i=2}^{3}\frac{1}{i!(3-i)!}\,{}^{+}\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{i} & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{3-i} \end{vmatrix}^{+}$$

$$=\frac{1}{2!}\,{}^{+}\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{2} & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{1} \end{vmatrix}^{+}+\frac{1}{3!}\,{}^{+}\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{3} & \underbrace{e^{-\frac{x}{\theta_3}}}_{0} \end{vmatrix}^{+}$$

$$=\frac{1}{2!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix}^{+} + \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix}^{+}$$

ودالة التوزيع التجميعى للإحصاء الترتيبى Y_3 عندما $n = 3$ هي:

$$F_{3:3}(x)=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_1}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_2}} \\ 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} & 1-e^{-\frac{x}{\theta_3}} \end{vmatrix}^{+}$$

(ب) تحت فرض توزيع وايبل

داله التوزيع التجميعى للاحصاء الترتيبى من الرتبه r (Y_r) هي:

$$F_{r:n}(x)=\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^{\beta}} & e^{-\alpha_1 x^{\beta}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_n x^{\beta}}}_{i} & \underbrace{e^{-\alpha_n x^{\beta}}}_{n-i} \end{vmatrix}^{+} .-\infty < x < \infty.$$

داله التوزيع التجميعى للاحصاء الترتيبى Y_1 عندما $n = 3$ هي:

$$F_{1:3}(x)=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{i!(3-i)!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^{\beta}} & e^{-\alpha_1 x^{\beta}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{i} & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{3-i} \end{vmatrix}^{+}$$

$$=\frac{1}{2!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^{\beta}} & e^{-\alpha_1 x^{\beta}} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x^{\beta}} \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{1} & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{2} \end{vmatrix}^{+} + \frac{1}{2!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^{\beta}} & e^{-\alpha_1 x^{\beta}} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x^{\beta}} \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{2} & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{1} \end{vmatrix}^{+}$$

$$+\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^{\beta}} & e^{-\alpha_1 x^{\beta}} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x^{\beta}} \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{3} & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{0} \end{vmatrix}^{+}$$

وداله التوزيع التجميعى للاحصاء الترتيبى Y_2 عندما $n=3$ هي:

$$F_{2:3}(x)=\sum_{i=2}^{3}\frac{1}{i!(3-i)!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^{\beta}} & e^{-\alpha_1 x^{\beta}} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{i} & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{3-i} \end{vmatrix}^{+}$$

$$=\frac{1}{2!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^{\beta}} & e^{-\alpha_1 x^{\beta}} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x^{\beta}} \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{2} & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{1} \end{vmatrix}^{+}+\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^{\beta}} & e^{-\alpha_1 x^{\beta}} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^{\beta}} & e^{-\alpha_2 x^{\beta}} \\ \underbrace{1-e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{3} & \underbrace{e^{-\alpha_3 x^{\beta}}}_{0} \end{vmatrix}^{+}$$

وداله التوزيع التجميعى للاحصاء الترتيبى Y_3 و $n=3$ هي:

$$F_{3:3}(x)=\frac{1}{3!}\begin{vmatrix} 1-e^{-\alpha_1 x^{\beta}} & 1-e^{-\alpha_1 x^{\beta}} & 1-e^{-\alpha_1 x^{\beta}} \\ 1-e^{-\alpha_2 x^{\beta}} & 1-e^{-\alpha_2 x^{\beta}} & 1-e^{-\alpha_2 x^{\beta}} \\ 1-e^{-\alpha_3 x^{\beta}} & 1-e^{-\alpha_3 x^{\beta}} & 1-e^{-\alpha_3 x^{\beta}} \end{vmatrix}^{+}$$

(ج) تحت فرض توزيع ايرلنج

داله التوزيع التجميعى للاحصاء الترتيبى من الرتبه r (Y_r) هي:

$$F_{r:n}(x)=\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}\begin{vmatrix} 1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x} & \sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_1 x)^t}{t!}e^{-\lambda_1 x} \\ \vdots & \vdots \\ \underbrace{1-\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_n x)^t}{t!}e^{-\lambda_n x}}_{i} & \underbrace{\sum_{t=0}^{m-1}\frac{(\lambda_n x)^t}{t!}e^{-\lambda_n x}}_{n-i} \end{vmatrix}^{+},-\infty<x<\infty$$

وداله التوزيع التجميعى للاحصاء الترتيى من الرتبه Y_1 و $n = 3$ هي:

$$F_{1:3}(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i!(3-i)!} \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1-\sum\limits_{t=0}^{1} \dfrac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} \\ 1-\sum\limits_{t=0}^{1} \dfrac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} \\ 1-\sum\limits_{t=0}^{1} \dfrac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x} \end{matrix}}_{i} & \underbrace{\begin{matrix} \sum\limits_{t=0}^{1} \dfrac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} \\ \sum\limits_{t=0}^{1} \dfrac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} \\ \sum\limits_{t=0}^{1} \dfrac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x} \end{matrix}}_{3-i} \end{vmatrix}^{+}_{+}$$

$$\therefore F_{1:3}(x) = \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1-\sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} \\ 1-\sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} \\ 1-\sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x} \end{matrix}}_{1} & \underbrace{\begin{matrix} \sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x} \end{matrix}}_{2} \end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{2!} \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1-\sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} \\ 1-\sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} \\ 1-\sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x} \end{matrix}}_{2} & \underbrace{\begin{matrix} \sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x} \end{matrix}}_{1} \end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{3!} \begin{vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1-\sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} \\ 1-\sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} \\ 1-\sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x} \end{matrix}}_{3} & \underbrace{\begin{matrix} \sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_1 x)^t}{t!} e^{-\lambda_1 x} \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_2 x)^t}{t!} e^{-\lambda_2 x} \\ \sum\limits_{t=0}^{m-1} \dfrac{(\lambda_3 x)^t}{t!} e^{-\lambda_3 x} \end{matrix}}_{0} \end{vmatrix}$$

(٧-٢) عزوم الاحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية غير متماثلة التوزيع:
Moments of Order Statistics for No identically Distributed Variables

اعتمدت طريقة ايجاد العزوم للاحصاءات الترتيبية لمتغيرات عشوائية غير متماثلة التوزيع على استخدام العلاقات التكرارية. وقد اسس Balakrishnan ، فى الاعوام (1988a) , (1988b) , (1994a) , (1994b) , (1994 c) ، الكثير من العلاقات التكرارية للعزوم المفرده وعزوم حاصل الضرب. ففى الفترة من (1994) الى (2004) اتجهت الابحاث العلمية اتجاهين علميين مختلفين. فالاتجاه الأول يعتمد على إيجاد هذه العزوم على فكره اساسيه ، وهي وجود علاقة خطيه بين داله الكثافة الاحتمالية للتوزيع وداله التوزيع التجميعية لبعض التوزيعات حيث طبقها Child and Balakrishnan (1998) على توزيع باريتو. والأتجاه الثاني اتبعه Barakat and Abdelkader (2000) حيث تم ايجاد العزوم للاحصاءات الترتيبية لتوزيعات غير متماثلة تحت فرض توزيع وايبل وعمماها فى عام (2004) وتمتاز هذه الطريقة بعموميتها من حيث امكانية تطبيقها على أى توزيع سواء وجدت علاقة خطية بين داله الكثافة الاحتمالية ، ودالة التوزيع التجميعى أم لم توجد. وتعتمد هذه الطريقة على إيجاد العزم للإحصاء الترتيبى من الرتبه r بدلالة العزم k لاكبر الاحصاءات الترتيبية واصغرها لكل العينات الممكنه المسحوبه من العينه المعطاه.

لتكن $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغيرات عشوائية مستقلة بدوال توزيع تجميعى $F_i(x)$ ودوال كثافة احتمالية $f_i(x)$ ، ولتكن $Y_1 < Y_2 < \ldots < Y_n$ الاحصاءات الترتيبية ، سوف نرمز للعزم k للاحصاء الترتيبى من الرتبه r والمأخوذ من عينه عشوائية من الحجم n بالرمز:

$$\mu_{r:n}^{(k)} = E\left(Y_r^k\right) ,$$

حيث:

$$k \geq 1 \quad , \quad 1 \leq r \leq n$$

وسوف نرمز للعزم الاول بالرمز $\mu_{r:n}^{(1)} = \mu_{r:n}$.

وفيما يلى بعض العلاقات التكرارية للحصول على العزوم للاحصاءات الترتيبية تحت فرض التوزيعات التالية:

(٧-٢-١) التوزيع الاسي:

(أ) علاقة تكرارية لعزوم اصغر الاحصاءات الترتيبية وتحت فرض التوزيع الاسي:

عندما $n = 1,2,.. \quad , k = 0,1,2,...$

$$\mu_{1:n}^{(k+1)} = \frac{k+1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_i}\right)} \mu_{1:n}^{(k)} \,. \qquad (٤٠٧)$$

بوضع $k = 0$, $k = 1$ فى (٤٠٧) نحصل على الوسط الحسابى $\mu_{1:n}$ والعزم الثانى حول الصفر $\mu_{1:n}^2$ على التوالى لاصغر الاحصاءات الترتيبية حيث:

$$\mu_{1:n} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_i}\right)},$$

$$\mu_{1:n}^{(2)} = \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_i}\right)} \mu_{1:n}$$

$$= \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_i}\right)^2} \,.$$

وعلى ذلك التباين لأصغر الإحصاءات الترتيبية (Y_1) هو:

$$\sigma_{1:n}^2 = \mu_{1:n}^{(2)} - \left(\mu_{1:n}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_i}\right)^2} \,.$$

عندما $n = 3$ فإن:

$$\mu_{1:3} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \,,$$

$$\mu_{1:3}^{(2)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}\right)^2} \,, \qquad (٥٠٧)$$

$$\sigma_{1:3}^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}\right)^2} \,.$$

(ب) علاقة لعزوم الإحصاء الترتيبي من الرتبه r (Y_r) :

لكل $k = 0,1,2,...$, $2 \le r \le n$ فإن :

$$\mu_{r:n}^{(k+1)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ (k+1)\mu_{r:n}^{(k)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_i} \mu_{r-1:n-1}^{[i](k+1)} \right\} \qquad (٦٠٧)$$

ومن (٦٠٧) بوضع $n = 3 , r = 2$ نحصل على عزوم الإحصاء الترتيبى Y_2 كالتالى:

$$\mu_{2:3}^{(1)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \mu_{1:2}^{[1]} + \frac{1}{\theta_2} \mu_{1:2}^{[2]} + \frac{1}{\theta_3} \mu_{1:2}^{[3]} \right)$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_1}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \right), \qquad (٧٠٧)$$

$$\mu_{2:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ 2\mu_{2:3}^{(1)} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i} \mu_{1:2}^{[i](2)} \right\}. \qquad (٨٠٧)$$

وبالتعويض من (٧٠٧) فى (٨٠٧) نحصل على:

$$\mu_{2:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\theta_1} \mu_{1:2}^{[1](2)} + \frac{1}{\theta_2} \mu_{1:2}^{[2](2)} + \frac{1}{\theta_3} \mu_{1:2}^{[3](2)} \right\}. \qquad (٩٠٧)$$

وبالتعويض من (٤٠٧) فى (٩٠٧) نحصل على :

$$\mu_{2:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \right) \right.$$

$$+\frac{1}{\theta_1}\frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}\right)^2}+\frac{1}{\theta_2}\frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}\right)^2}+\frac{1}{\theta_3}\frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}\right)^2}\Bigg\} \quad (١٠٠٧)$$

وبالتالى فإن تباين الإحصاء الترتيبى Y_2 هو :

$$\sigma^2_{2.3}=\mu^{(2)}_{2.3}-(\mu^{(1)}_{2:3})^2. \quad (١١٠٧)$$

وبالتعويض من (١٠٠٧) و (٧٠٧) فى (١١٠٧) نحصل علي:

$$\sigma^2_{2:3}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left\{\frac{2}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left(1+\frac{1}{\theta_1}\frac{1}{\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}}+\frac{1}{\theta_2}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}}+\frac{1}{\theta_3}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\theta_1}\frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}\right)^2}+\frac{1}{\theta_2}\frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}\right)^2}+\frac{1}{\theta_3}\frac{2}{\left(\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}\right)^2}\right\}$$

$$-\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}(1+\frac{1}{\theta_1}\frac{1}{\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}}+\frac{1}{\theta_2}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}}+\frac{1}{\theta_3}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}})\right)^2, \quad (١٢٠٧)$$

ومن (٦.٧) بوضع $n=3\ , r=3$ نحصل على عزوم أكبر الإحصاءات كالتالى:

$$\mu^{(1)}_{3:3}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left(1+\frac{1}{\theta_1}\mu^{[1]}_{2:2}+\frac{1}{\theta_2}\mu^{[2]}_{2:2}+\frac{1}{\theta_3}\mu^{[3]}_{2:2}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left(1+\frac{1}{\theta_1}\frac{1}{\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}}(1+\frac{\theta_3}{\theta_2}+\frac{\theta_2}{\theta_3})+\frac{1}{\theta_2}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}}(1+\frac{\theta_3}{\theta_1}+\frac{\theta_1}{\theta_3})\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\theta_3}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}}(1+\frac{\theta_2}{\theta_1}+\frac{\theta_1}{\theta_2})\right), \quad (١٣٠٧)$$

$$\mu_{3:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ 2\mu_{3:3}^{(1)} + \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i} \mu_{2:2}^{[i](2)} \right\}. \quad (١٤٠٧)$$

وبالتعويض من (١٣٠٧) فى (١٤٠٧) نحصل علي:

$$\mu_{3:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_3}) + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_3}) \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} (1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2}) \right) + \left(\frac{1}{\theta_1} \mu_{2:2}^{[1](2)} + \frac{1}{\theta_2} \mu_{2:2}^{[2](2)} + \frac{1}{\theta_3} \mu_{2:2}^{[3](2)} \right) \right\}. \quad (١٥٠٧)$$

وباستخدام (٦٠٧) مرة أخرى فى العلاقة (١٥٠٧) نحصل على:

$$\mu_{3:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left\{ \frac{2}{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{\theta_i}\right)} \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_3}) \right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_3}) + \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} (1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2}) \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{\theta_1} \frac{1}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} \left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_2} + \frac{\theta_2}{\theta_3}) + \frac{2\theta_3^2}{\theta_2} + \frac{2\theta_2^2}{\theta_3} \right) \right.$$

$$+ \frac{1}{\theta_2} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} \left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_3}} (1 + \frac{\theta_3}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_3}) + \frac{2\theta_3^2}{\theta_1} + \frac{2\theta_1^2}{\theta_3} \right)$$

$$+ \frac{1}{\theta_3} \frac{1}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} \left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2}} (1 + \frac{\theta_2}{\theta_1} + \frac{\theta_1}{\theta_2}) + \frac{2\theta_2^2}{\theta_1} + \frac{2\theta_1^2}{\theta_2}]] \right) \quad (١٦٠٧)$$

ونحصل على التباين بالتعويض من (١٥٠٧) (١٦٠٧)كالتالي:

$$\sigma_{3:3}^2 = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left\{\frac{2}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left(1+\frac{1}{\theta_1}\frac{1}{\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}}(1+\frac{\theta_3}{\theta_2}+\frac{\theta_2}{\theta_3})\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\theta_2}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}}(1+\frac{\theta_3}{\theta_1}+\frac{\theta_1}{\theta_3})+\frac{1}{\theta_3}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}}(1+\frac{\theta_2}{\theta_1}+\frac{\theta_1}{\theta_2})\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\theta_1}\frac{1}{\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}}\left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}}(1+\frac{\theta_3}{\theta_2}+\frac{\theta_2}{\theta_3})+\frac{2\theta_3^2}{\theta_2}+\frac{2\theta_2^2}{\theta_3}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{\theta_2}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}}\left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}}(1+\frac{\theta_3}{\theta_1}+\frac{\theta_1}{\theta_3})+\frac{2\theta_3^2}{\theta_1}+\frac{2\theta_1^2}{\theta_3}\right)$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\theta_3}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}}\left(\frac{2}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}}(1+\frac{\theta_2}{\theta_1}+\frac{\theta_1}{\theta_2})+\frac{2\theta_2^2}{\theta_1}+\frac{2\theta_1^2}{\theta_2}\right)\right)\right\}$$

$$-\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left(1+\frac{1}{\theta_1}\frac{1}{\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}}\left(1+\frac{\theta_3}{\theta_2}+\frac{\theta_2}{\theta_3}\right)+\frac{1}{\theta_2}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}}\left(1+\frac{\theta_3}{\theta_1}+\frac{\theta_1}{\theta_3}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\theta_3}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}}\left(1+\frac{\theta_2}{\theta_1}+\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)\right)\right)^2. \qquad (١٧٠٧)$$

(ج) علاقة تكرارية لتوقع حاصل ضرب أصغر احصاءين ترتيبين متتاليين:

$$\mu_{1,2:n} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i}\right)}\{\mu_{1:n}+\mu_{2:n}\} \qquad (١٨٠٧)$$

فعلى سبيل المثال بوضع $n=3$ فى (١٨٠٧)نحصل علي:

$$\mu_{1,2:3}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\{\mu_{1:3}+\mu_{2:3}\}$$

ومن العلاقتين (٤٠٧) و (٦٠٧) نحصل على $\mu_{1,2:3}$ كالتالى:

$$\mu_{1,2:3}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left\{\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}+\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left[1+\frac{1}{\theta_1}\left(\frac{1}{\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\theta_2}\left(\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}}\right)+\frac{1}{\theta_3}\left(\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}}\right)\right]\right\}.$$

(د) علاقة تكرارية لتوقع حاصل ضرب أي احصاءين ترتيبين متتاليين:

$$\mu_{r,r+1:n}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i}\right)}\{\mu_{r:n}+\mu_{r+1:n}+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i}\,\mu^{[i]}_{r-1,r:n-1}.\tag{١٩٠٧}$$

ويمكن توضيح ذلك عندما $n=3\,,\,r=2$ كالتالى:

$$\mu_{2,3:3}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left\{(\mu_{2:3}+\mu_{3:3})+\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\,\mu^{[i]}_{1,2:2}\right\}$$

$$=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left\{(\mu_{2:3}+\mu_{3:3})+\frac{1}{\theta_1}\,\mu^{[1]}_{1,2:2}+\frac{1}{\theta_2}\,\mu^{[2]}_{1,2:2}+\frac{1}{\theta_3}\,\mu^{[3]}_{1,2:2}\right\}\tag{٢٠٠٧}$$

وبالتعويض من العلاقات المناسبة فى العلاقة (٢٠٠٧) نحصل علي:

$$\mu_{2.3:3}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left[\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left(1+\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}}+\frac{1}{\theta_2}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}}+\frac{1}{\theta_3}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{\theta_i}\right)}\left[1+\frac{1}{\theta_1}\frac{1}{\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}}(1+\frac{\theta_3}{\theta_2}+\frac{\theta_2}{\theta_3})+\frac{1}{\theta_2}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}}(1+\frac{\theta_3}{\theta_1}+\frac{\theta_1}{\theta_3})\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\theta_3}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}}(1+\frac{\theta_2}{\theta_1}+\frac{\theta_1}{\theta_2})\right)+\frac{1}{\theta_1}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_2}}+\frac{1}{\theta_2}\frac{1}{\frac{1}{\theta_1}+\frac{1}{\theta_3}}+\frac{1}{\theta_3}\frac{1}{\frac{1}{\theta_2}+\frac{1}{\theta_3}}\right] \quad (٢١٠٧)$$

(هـــ) علاقة تكرارية لتوقع حاصل ضرب أصغر الاحصاءات الترتيبية وأي إحصاء آخر:

لكل : $3 \le s \le n-1$ فإن:

$$\mu_{1,s:n}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i}\right)}\{\mu_{1:n}+\mu_{s:n}\} \quad (٢٢٠٧)$$

(و) علاقة تكرارية لتوقع حاصل ضرب أي احصائئين

لكل: $2 \le r < s \le n,\ s\text{-}r \ge 2$ فإن:

$$\mu_{r,s:n}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i}\right)}\Big\{(\mu_{r:n}+\mu_{s:n}) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta_i}\mu_{r-1,s-1:n-1}^{[i]}\Big\}.$$

(٧-٢-٢) توزيع وايبل

تمكن Barakat & Abdelkader (2000) من إيجاد عزوم الإحصاءات الترتيبية من توزيعات وايبل في شكل علاقات تكرارية بطريقة سهلة لا تحتاج لأي فروض معينة ، كوجود

علاقة خطية بين دالة كثافة الإحتمال ودالة التوزيع التجميعية للتوزيع المستخدم وقد تم إيجاد العزم k لأصغر الإحصاءات الترتيبية وأكبرها $\mu_{n:n}^{(k)}$, $\mu_{1:n}^{(k)}$ من عينه حجمها n وكذلك العزم k لأي إحصاء ترتيبي $\mu_{r:n}^{(k)}$, $r \le n$ من عينه حجمها n.

(أ) علاقة تكرارية لعزوم أكبر الإحصاءات الترتيبية من توزيعات وايبل:

لكل $n = 1,2,...$, $k=1,2,...$ فإن:

$$\mu_{n:n}^{(k)} = B(k,\beta)\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}I_j, \qquad (٢٣٠٧)$$

$$\mu_{1:n}^{(k)} = I_n B(k,\beta),$$

حيث:

$$I_j = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_j\le n} \frac{1}{(\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\ldots+\alpha_{i_j})^{\frac{k}{\beta}}}, \qquad (٢٤٠٧)$$

$B(k,\beta) = \dfrac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta}$ و $\Gamma(.)$ هي دالة جاما.

وعند أحجام عينات $n = 3,5$ يمكن إيجاد المتوسط والعزم الثاني حول الصفر والتباين لأكبر الإحصاءات الترتيبية كمايلي:

$$\therefore \mu_{3:3}^{(k)} = B(k,\beta)\sum_{j=1}^{3}(-1)^{j+1}I_j, \qquad (٢٥٠٧)$$

$$=B(k,\beta)(I_1 - I_2 + I_3).$$

ومن العلاقة (٢٤٠٧) وحيث $B(k,\beta) = \dfrac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta}$ فإن:

$$\therefore \mu_{3:3}^{(k)} = \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta}\left(\frac{1}{(\alpha_1)^{\frac{k}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_2)^{\frac{k}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^{\frac{k}{\beta}}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}}\right). \qquad (٢٦٠٧)$$

ويكون المتوسط والعزم الثانى والتباين لاكبر الإحصاءات الترتيبية من (٢٦٠٧) كالتالى:

$$\mu_{3:3}^{(1)}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta}\left(\frac{1}{(\alpha_1)^{\frac{1}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_2)^{\frac{1}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^{\frac{1}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}}\right), \qquad (٢٧٠٧)$$

$$\mu_{3:3}^{(2)}=\frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta}\left(\frac{1}{(\alpha_1)^{\frac{2}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_2)^{\frac{2}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^{\frac{2}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}}\right), \qquad (٢٨٠٧)$$

$$\sigma_{3:3}^{(2)}=\frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta}\left(\frac{1}{(\alpha_1)^{\frac{2}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_2)^{\frac{2}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^{\frac{2}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}}\right)$$
$$-\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta}\left(\frac{1}{(\alpha_1)^{\frac{1}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_2)^{\frac{1}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^{\frac{1}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}}-\frac{1}{(\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}}\right)\right]^2 \qquad (٢٩٠٧)$$

(ب) علاقة تكرارية لعزوم اصغر الاحصاءات الترتيبية

$$\mu_{1:n}^{(k)}=B(k,\beta)I_n \qquad (٣٠٠٧)$$

والتى منها يتم الحصول على الوسط الحسابى للإحصاء الترتيبى Y_1 :

$$\mu_{1:n} = B(1,\beta)I_n$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)^{\frac{1}{\beta}}}, \qquad (٣١٠٧)$$

والعزم الثاني للإحصاء الترتيبي Y_1 هو:

$$\mu_{1:n}^{(2)} = B(2,\beta)I_n$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{\frac{2}{\beta}}}, \qquad (٣٢٠٧)$$

والتباين للإحصاء الترتيبي Y_1 هو:

$$\sigma_{1:n}^{(2)} = \mu_{1:n}^{(2)} - (\mu_{1:n})^2$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{\frac{2}{\beta}}} - \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{\frac{1}{\beta}}}\right)^2 \qquad (٣٣٠٧)$$

وبوضع $n = 3$ في (٣١٠٧) و (٣٢٠٧) و (٣٣٠٧) يتم الحصول على:

$$\mu_{1:3} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}}, \qquad (٣٤٠٧)$$

$$\mu_{1:3}^{(2)} = \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^{\frac{2}{\beta}}}, \qquad (٣٥٠٧)$$

$$\sigma_{1:3}^{2} = \frac{2\Gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)}{\beta\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\right)^{\frac{2}{\beta}}} - \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\beta\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\right)^{\frac{1}{\beta}}}\right)^2. \qquad (٣٦٠٧)$$

(ج) علاقة تكرارية لعزوم الاحصاء الترتيبي من الرتبة r :

لكل $r = 1,2,...$, $k = 1,2,...$ فإن:

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \mu_{r-1:n}^{(k)} + \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j-1} A_j \; B(k,\beta) I_{n-r+j} \, , \qquad (٣٧٠٧)$$

حيث المتتالية $\{I_j\}_{j=1}^{j=r}$ عرفت فى (٢٤٠٧) و

$$B(k,\beta) = \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} \, , \qquad (٣٨٠٧)$$

$$A_j = \binom{n-r+j}{j-1} ,$$

مع اعتبار ان $\mu_{0:n}^{(k)} = 0$.

وعند أحجام عينات $n = 3,5$ يمكن إيجاد الوسط الحسابى والعزم الثانى حول الصفر والتباين لوسيط الإحصاءات الترتيبية كمايلى:

من العلاقة (٣٧٠٧) بوضع $r = 2$, $n=3$ يتم الحصول على:

$$\mu_{2:3}^{(k)} = \mu_{1:3}^{(k)} + \sum_{j=1}^{2} (-1)^{j-1} B(k,\beta) A_j \; I_{1+j} \qquad (٤٠٠٧)$$

$$= \frac{B(k,\beta)}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{1}{\beta}}} + B(k,\beta)[I_2 - 3I_3],$$

$$B(k,\beta) = \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} \, , \qquad (٤١٠٧)$$

$$I_2 = \sum_{1\le i_1 < i_2 \le 3}\sum \frac{1}{(\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2})^{\frac{k}{\beta}}} = \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} , \qquad (٤٢٠٧)$$

$$I_3 = \sum_{1\le i_1 < i_2 < i_3 \le 3}\sum \frac{1}{(\alpha_{i_1}+\alpha_{i_2}+\alpha_{i_3})^{\frac{k}{\beta}}} . \qquad (٤٣٠٧)$$

وبالتعويض من (٤٣٠٧) و (٤٢٠٧) و (٤١٠٧) فى (٤٠٠٧) نحصل على:

$$\mu_{2:3}^{(k)} = \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta}\left(\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^{\frac{k}{\beta}}} + \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}}\right) - \frac{3k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta}\left(\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}}\right). \qquad (٤٤٠٧)$$

وبالمثل وبوضع $r = 3$, $n = 5$ في (٣٧٠٧) يتم الحصول على:

$$\mu_{3:5}^{(k)} = \mu_{2:5}^{(k)} + \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta}(I_3 - 4I_4 + 10I_5), \qquad (٤٥٠٧)$$

$$\mu_{2:5}^{(k)} = \mu_{1:5}^{(k)} + \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta}(I_4 - 5I_5), \qquad (٤٦٠٧)$$

$$\mu_{1:5}^{(k)} = \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta} I_5. \qquad (٤٧٠٧)$$

وبالتعويض من (٤٧٠٧) و (٤٦٠٧) في (٤٥٠٧) يتم الحصول على:

$$\mu_{3:5}^{(k)} = \frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta}(I_3 - 3I_4 + 6I_5). \qquad (٤٨٠٧)$$

ومن العلاقة (٢٤٠٧) فإن:

$$I_3 = \sum_{t \le i_1 < i_2} \sum_{< i_3 \le 5} \frac{1}{\left(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3}\right)^{\frac{k}{\beta}}} , \qquad (٤٩٠٧)$$

$$I_4 = \sum_{t \le i_1 < i_2} \sum_{< i_3 < i_4 \le 5} \frac{1}{\left(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} + \alpha_{i_4}\right)^{\frac{k}{\beta}}} , \qquad (٥٠٠٧)$$

$$I_5 = \sum_{t \le i_1 < i_2} \sum_{< i_3 < i_4 < i_5 \le 5} \frac{1}{\left(\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} + \alpha_{i_4} + \alpha_{i_5}\right)^{\frac{k}{\beta}}} , \qquad (٥١٠٧)$$

والتعويض من (٥١٠٧) و (٥٠٠٧) و (٤٩٠٧)في (٤٨٠٧)يتم الحصول على:

$$\mu_{3:5}^{(k)}=\frac{k\Gamma\left(\frac{k}{\beta}\right)}{\beta}\left(\frac{6}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}}-\frac{3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)^{\frac{k}{\beta}}}\right.$$
$$-\frac{3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}}-\frac{3}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}}$$
$$-\frac{3}{(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}}-\frac{3}{(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}}$$
$$+\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^{\frac{k}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)^{\frac{k}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}}$$
$$+\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4)^{\frac{k}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_4+\alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}}$$
$$+\frac{1}{(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)^{\frac{k}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}}+\frac{1}{(\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}}$$
$$\left.+\frac{1}{(\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5)^{\frac{k}{\beta}}}\right). \qquad (٥٢٠٧)$$

(٧-٢-٣) توزيع باريتو

(أ) علاقة تكرارية لعزوم أصغر الإحصاءات الترتيبية:

لكل ... $n \geq 1 , k = 0\ 1, 2,$ فإن:

$$\mu_{1:n}^{(k)}=\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i - k} \qquad (٥٣٠٧)$$

وعندما $n=3$ ومن (٥٣٠٧) يتم الحصول على المتوسط للإحصاء الترتيبي Y_1 كالتالى :

$$\mu_{1:3}=\frac{v_1+v_2+v_3}{v_1+v_2+v_3-1}, \qquad (٥٤٠٧)$$

والعزم الثانى حول الصفر للاحصاء الترتيبى Y_1 هو :

$$\mu_{1:3}^{(2)}=\frac{v_1+v_2+v_3}{v_1+v_2+v_3-2}, \qquad (٥٥٠٧)$$

والتباين للإحصاء الترتيبي Y_1 هو:

$$\sigma_{1:3}^2 = \mu_{1:3}^{(2)} - \left(\mu_{1:3}\right)^2$$
$$= \frac{v_1+v_2+v_3}{v_1+v_2+v_3-2} - \left(\frac{v_1+v_2+v_3}{v_1+v_2+v_3-1}\right)^2 . \qquad (٥٦٠٧)$$

(ب) علاقة تكرارية لعزوم الإحصاء الترتيبي من الرتبه r :

لكل $n \geq 1$, $k = 0\ 1, 2, \ldots$ فإن:

$$\mu_{r:n}^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i\ \mu_{r-1:n-1}^{[i](k)}}{\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) - k} \qquad (٥٧٠٧)$$

بوضع $r = 2$, $n = 3$ فى (٥٧٠٧) يتم الحصول على:

$$\mu_{2:3}^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{3} v_i\ \mu_{1:2}^{[i](k)}}{\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\right) - k} = \frac{v_1\ \mu_{i:2}^{[1](k)} + v_2\ \mu_{i:2}^{[2](k)} + v_3\ \mu_{i:2}^{[3](k)}}{\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\right) - k}$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\right) - k}\left(v_1 \frac{\sum_{i=2}^{3} v_i}{\sum_{i=2}^{3} v_i - k} + v_2 \frac{\sum_{i=1,i=2}^{3} v_i}{\sum_{i=1,i\neq 2}^{3} v_i - k} + v_3 \frac{\sum_{i=1}^{2} v_i}{\sum_{i=1}^{2} v_i - k}\right). \qquad (٥٨٠٧)$$

ومن العلاقة (٥٨٠٧) يمكن حساب المتوسط والعزم الثانى والتباين للإحصاء الترتيبى Y_2 كما يلى:

$$\mu_{2:3} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\right) - 1}\left(v_1 \frac{\sum_{i=2}^{3} v_i}{\sum_{i=2}^{3} v_i - 1} + v_2 \frac{\sum_{i=1,i\neq 2}^{3} v_i}{\sum_{i=1,i\neq 2}^{3} v_i - 1} + v_3 \frac{\sum_{i=1}^{2} v_i}{\sum_{i=1}^{2} v_i - 1}\right). \qquad (٥٩٠٧)$$

$$\mu_{2:3}^{(2)} = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\right) - 2}\left(v_1 \frac{\sum_{i=2}^{3} v_i}{\sum_{i=2}^{3} v_i - 2} + v_2 \frac{\sum_{i=1,i\neq 2}^{3} v_i}{\sum_{i=1,i\neq 2}^{3} v_i - 2} + v_3 \frac{\sum_{i=1}^{2} v_i}{\sum_{i=1}^{2} v_i - 2}\right). \qquad (٦٠٠٧)$$

$$\sigma_{2:3}^{(2)}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}v_i\right)-2}\left(v_1\frac{\sum_{i=2}^{3}v_i}{\sum_{i=2}^{3}v_i-2}+v_2\frac{\sum_{i=1,i\neq2}^{3}v_i}{\sum_{i=1,i\neq2}^{3}v_i-2}+v_3\frac{\sum_{i=1}^{2}v_i}{\sum_{i=1}^{2}v_i-2}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}v_i\right)-1}\left(v_1\frac{\sum_{i=2}^{3}v_i}{\sum_{i=2}^{3}v_i-1}+v_2\frac{\sum_{i=1,i\neq2}^{3}v_i}{\sum_{i=1,i\neq2}^{3}v_i-1}+v_3\frac{\sum_{i=1}^{2}v_i}{\sum_{i=1}^{2}v_i-1}\right)\right)^2. \qquad (٦١٠٧)$$

بوضع $r=3$, $n=3$ في (٥٧٠٧) يتم الحصول على:

$$\mu_{3:3}^{(k)}=\frac{\sum_{i=1}^{3}v_i\ \mu_{2:2}^{[i](k)}}{\left(\sum_{i=1}^{3}v_i\right)-k}$$

$$=\frac{v_1\ \mu_{2:2}^{[1](k)}+v_2\ \mu_{2:2}^{[2](k)}+v_3\ \mu_{2:2}^{[3](k)}}{\left(\sum_{i=1}^{3}v_i\right)-k}$$

$$=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}v_i\right)-k}\left(v_1\frac{v_2\ \mu_{1:1}^{[1][2](k)}+v_3\ \mu_{1:1}^{[1][3](k)}}{\sum_{i=2}^{3}v_i-k}\right.$$

$$\left.+v_2\frac{v_1\ \mu_{1:1}^{[1][2](k)}+v_3\ \mu_{1:1}^{[2][3](k)}}{\sum_{i=1,i\neq2}^{3}v_i-k}+v_3\frac{v_1\ \mu_{1:1}^{[1][3](k)}+v_2\ \mu_{1:1}^{[2][3](k)}}{\sum_{i=1,i\neq2}^{2}v_i-k}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3}v_i\right)-k}\left(v_1\frac{v_2\frac{v_3}{v_3-k}+v_3\frac{v_2}{v_2-k}}{\sum_{i=2}^{3}v_i-k}\right.$$

$$\left.+v_2\frac{v_1\frac{v_3}{v_3-k}+v_3\frac{v_1}{v_1-k}}{\sum_{i=1,i\neq2}^{3}v_i-k}+v_3\frac{v_1\frac{v_2}{v_2-k}+v_2\frac{v_1}{v_1-k}}{\sum_{i=2}^{2}v_i-k}\right). \qquad (٦٢٠٧)$$

ومن (٦٢٠٧) عندما $k=1,2$ يتم الحصول على المتوسط والعزم الثاني والتباين كالتالي:

$$\mu_{3.3}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\right)-1}\left(v_1\frac{v_2\frac{v_3}{v_3-1}+v_3\frac{v_2}{v_2-1}}{\sum_{i=2}^{3} v_i-1}+v_2\frac{v_1\frac{v_3}{v_3-1}+v_3\frac{v_1}{v_1-1}}{\sum_{i=1,i\neq 2}^{3} v_i-1}\right.$$

$$\left.+v_3\frac{v_1\frac{v_2}{v_2-1}+v_2\frac{v_1}{v_1-1}}{\sum_{i=1}^{2} v_i-1}\right).$$

$$\mu_{3:3}^{(2)}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\right)-2}\left(v_1\frac{v_2\frac{v_3}{v_3-2}+v_3\frac{v_2}{v_2-2}}{\sum_{i=2}^{3} v_i-2}+v_2\frac{v_1\frac{v_3}{v_3-2}+v_3\frac{v_1}{v_1-2}}{\sum_{i=1,i\neq 2}^{3} v_i-2}\right.$$

$$\left.+v_3\frac{v_1\frac{v_2}{v_2-2}+v_2\frac{v_1}{v_1-2}}{\sum_{i=1}^{2} v_i-2}\right).$$

$$\sigma_{3:3}^{(2)}=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\right)-2}\left(v_1\frac{v_2\frac{v_3}{v_3-2}+v_3\frac{v_2}{v_2-2}}{\sum_{i=2}^{3} v_i-2}+v_2\frac{v_1\frac{v_3}{v_3-2}+v_3\frac{v_1}{v_1-2}}{\sum_{i=1,i\neq 2}^{3} v_i-2}\right.$$

$$\left.+v_3\frac{v_1\frac{v_2}{v_2-2}+v_2\frac{v_1}{v_1-2}}{\sum_{i=1}^{2} v_i-2}\right)-\left(\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{3} v_i\right)-1}\left(v_1\frac{v_2\frac{v_3}{v_3-1}+v_3\frac{v_2}{v_2-1}}{\sum_{i=2}^{3} v_i-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.+v_2\frac{v_1\frac{v_3}{v_3-1}+v_3\frac{v_1}{v_1-1}}{\sum_{i=1,i\neq 2}^{3} v_i-1}++v_3\frac{v_1\frac{v_2}{v_2-1}+v_2\frac{v_1}{v_1-1}}{\sum_{i=1}^{2} v_i-1}\right)\right)^2$$

المراجع

المراجـــع References

أولا: المراجع العربية:

١. امير حنا هرمز ، ١٩٩٠ ، الإحصاء الرياضى – مديرية دار الكتب للطباعة والنشر.

٢. ثروت محمد عبد المنعم ، ٢٠٠٠ ، نظرية الاحتمالات – مكتبة الانجلو المصرية.

٣. زكيه بنت عامر عبد الله الصعيرى ٢٠٠٦ ، رسالة ماجستير بعنوان الاحصاءات المرتبة لمتغيرات عشوائية غير متماثله التوزيع – كلية التربية للبنات بجده.

٤. على عبد السلام العماوى وعلى حسين العجيلى ، ١٩٩٨ ، أساسيات الإحصاء الرياضى ، ادارة المطبوعات والنشر – جامعة الفتح.

٥. محمد بن ابراهيم عقيل و عبد الرحمن بن محمد ابو عمه ، ١٩٩٨ ، نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها ، النشر العلمى والمطابع – جامعة الملك سعود.

ثانياً: المراجع الأجنبية:

1. Balakrishnan N. (1988a). Relations and Identities for the Moments of Order Statistics From a Sample Containing a Single Outlier. Commun. Statist. – Theor. Meth., 17(7), 2173-2190.
2. Balakrishnan N. (1988b). Recurrence Relations for Order Statistics From n Independent and Non-Identically Distribution Random Variables. Ann. Inst. Statist. Math., 40, 273-277.
3. Balakrishnan N. (1992). Relationships Between Single Moments of Order Statistics from Non-identically Distributed Variables. . In Order Statistics and Nonparametric: Theory and Applications (Eds., P.k. Sen and I.A. Salama), Elsevier,Amsterdam,65-78.

4. Balakrishnan N. (1994a). Relationships Between Product Moments of Order Statistics From Non-Identically Distributed Variables. In Proceeding of the Basque Country Meeting on Probability and Statistics (Eds., M.L. Puri and J. Vilaplana), 73-90.

5. Balakrishnan N. (1994b). Order Statistics From Non-Identical Exponential Random Variables and Some Applications. Comput. Statist. Data Anal. 18(2), 203-253.

6. Balakrishnan N. (1994c). On Order Statistics From Non-Identical Exponential Random Variables and Some Applications. Commun Statist. – Theor. Meth. 23(12), 3373-3393.

7. Barakat H. M. And Abdelkader, Y. H. (2000). Computing the Moments of Order Statistics From Non-Identically Distributed Weibull Variables. J. Comp. Appl Math 117(1). 85-90.

8. Barakat H. M. And Abdelkader, Y. H. (2004). Computing the Moments of Order Statistics From Non-Identical Random Variables. Statist. Meth Appl. 13,15-26.

9. Barry, C. A. , Balakrishnan, N., and Nagaraja, H.N. (1992). First Course In Order Statistcs, John Wiley & Sons, New York.

10. Childs A. and Balakrishnan, N. (1998). Generalized Recurrence Ralations for Moment of Order Statistics From Non-Identical Pareto and Truncated Pareto Random Variables with Applications to Robustness. In: Balakrishnan ,N. and Rao. R. C. (Eds, Handbook of Statistics), Elsevier, Amsterdam, 16, 403-438.

11. David, H.A. (1981) Order Statistics (Second Edition). John Wiley & Sons, New York.

12. Harter, H.L. (1961) Expected Values of Normal Order Statistics, Biometrika, volume 48, pages. 151-165.

13. Mahmoud M.W. (1970) A First Cause In Order Statistics. Institute of National Planning (Cairo).

14. Minc, H. (1983). Theory of Permanents (1978-1981). Linear and Multilinear Algebra, 12, 227-263.

15. Minc, H. (1987). Theory of Permanents (1982-1985). Linear and Multilinear Algebra, 12, 109-198.

16. Mood, A.M., Graybill, F.A. and Boes, D.C. (1974) Introduction to the Theory of Statistics (3rd Edition) Mc Graw-Hill.

17. Vaughan, R. J. and Venables, W. N. (1972). Permanent Expressions for Order Statistics Densities. J.R. Statist. Soc., 34, 308-310.

الملاحق

الملاحق

ملحق (١) جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} b(k;n,p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذى الحدين .

ملحق (٢) جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعى القياسي.

ملحق (٣) جدول توزيع المدي القياسي.

ملحق (٤) جدول القيم الحرجه $t_\alpha(\nu)$ لتوزيع t .

ملحق (١)

جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} b(k;n,p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

a. n=5

		p														
		0.01	0.05	0.1	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
x	0	.951	.774	.590	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.999	.977	.919	.737	.633	.528	.337	.188	.087	.031	.016	.007	.000	.000	.000
	2	1.00	.999	.991	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.104	.058	.009	.001	.000
	3	1.00	1.00	1.00	.993	.984	.969	.913	.812	.663	.472	.367	.263	.081	.023	.001
	4	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.763	.672	.410	.226	.049

b. n=10

		p														
		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
x	0	.904	.599	.349	.107	.056	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.996	.914	.736	.376	.244	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	1.00	.988	.930	.678	.526	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.00	.999	.987	.879	.776	.650	.382	.172	.055	.011	.004	.001	.000	.000	.000
	4	1.00	1.00	.998	.967	.922	.850	.633	.377	.166	.047	.020	.006	.000	.000	.000
	5	1.00	1.00	1.00	.994	.980	.953	.834	.623	.367	.150	.078	.033	.002	.000	.000
	6	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.989	.945	.828	.618	.350	.224	.121	.013	.001	.000
	7	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.988	.945	.833	.617	.474	.322	.070	.012	.000
	8	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.989	.954	.851	.756	.624	.264	.086	.004
	9	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.994	.972	.944	.893	.651	.401	.096

جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} b(k\,;n,p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

c. n=15

x	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.860	.463	.206	.035	.013	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.990	.829	.549	.167	.080	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	1.00	.964	.816	.398	.236	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.00	.995	.944	.648	.461	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.00	.999	.987	.836	.686	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.00	1.00	.998	.939	.852	.722	.403	.151	.034	.004	.001	.000	.000	.000	.000
6	1.00	1.00	1.00	.982	.943	.869	.610	.304	.095	.015	.004	.001	.000	.000	.000
7	1.00	1.00	1.00	.996	.983	.950	.787	.500	.213	.050	.017	.004	.000	.000	.000
8	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.985	.905	.696	.390	.131	.057	.018	.000	.000	.000
9	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.966	.849	.597	.278	.148	.061	.002	.000	.000
10	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.991	.941	.783	.485	.314	.164	.013	.001	.000
11	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.982	.909	.703	.539	.352	.056	.005	.000
12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.996	.973	.873	.764	.602	.184	.036	.000
13	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.995	.965	.920	.833	.451	.171	.010
14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.995	.987	.965	.794	.537	.140

المصدر : عن [Devore(1995)]

جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} b(k\,;n,p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

d. n=20

x \ p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.818	.358	.122	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.983	.736	.392	.069	.024	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.999	.925	.677	.206	.091	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.00	.984	.867	.411	.225	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.00	.997	.957	.630	.415	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.00	1.00	.989	.804	.617	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	1.00	1.00	.998	.913	.786	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
7	1.00	1.00	1.00	.968	.898	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000	.000	.000
8	1.00	1.00	1.00	.990	.959	.887	.596	.252	.057	.005	.001	.000	.000	.000	.000
9	1.00	1.00	1.00	.997	.986	.952	.755	.412	.128	.017	.004	.001	.000	.000	.000
10	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.983	.872	.588	.245	.048	.014	.003	.000	.000	.000
11	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.995	.943	.748	.404	.113	.041	.010	.000	.000	.000
12	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.979	.868	.584	.228	.102	.032	.000	.000	.000
13	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.994	.942	.750	.392	.214	.087	.002	.000	.000
14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.979	.874	.584	.383	.196	.011	.000	.000
15	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.994	.949	.762	.585	.370	.043	.003	.000
16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.984	.893	.775	.589	.133	.016	.000
17	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.996	.965	.909	.794	.323	.075	.001
18	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.992	.976	.931	.608	.264	.017
19	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.997	.988	.878	.642	.182

جدول حساب $\sum_{k=0}^{x} b(k\,;n,p)$ لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين

d. n=25

x	p: 0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.778	.277	.072	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.974	.642	.271	.027	.007	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.998	.873	.537	.098	.032	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.00	.966	.764	.234	.096	.033	.002	.000	.00	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.00	.993	.902	.421	.214	.090	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.00	.999	.967	.617	.378	.193	.029	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	1.00	1.00	.991	.780	.561	.341	.074	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
7	1.00	1.00	.998	.891	.727	.512	.154	.022	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
8	1.00	1.00	1.00	.953	.851	.677	.274	.054	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
9	1.00	1.00	1.00	.983	.929	.811	.425	.115	.013	.000	.000	.000	.000	.000	.000
10	1.00	1.00	1.00	.994	.970	.902	.586	.212	.034	.002	.000	.000	.000	.000	.000
11	1.00	1.00	1.00	.998	.980	.956	.732	.345	.078	.006	.001	.000	.000	.000	.000
12	1.00	1.00	1.00	1.00	.997	.983	.846	.500	.154	.017	.003	.000	.000	.000	.000
13	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.994	.922	.655	.268	.044	.020	.002	.000	.000	.000
14	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.966	.788	.414	.098	.030	.006	.000	.000	.000
15	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.987	.885	.575	.189	.071	.017	.000	.000	.000
16	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.996	.946	.726	.323	.149	.047	.000	.000	.000
17	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.978	.846	.488	.273	.109	.002	.000	.000
18	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.993	.926	.659	.439	.220	.009	.000	.000
19	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.971	.807	.622	.383	.033	.001	.000
20	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.991	.910	.786	.579	.098	.007	.000
21	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.967	.904	.766	.236	.034	.000
22	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.991	.968	.902	.463	.127	.002
23	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.998	.993	.973	.729	.358	.026
24	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	.999	.996	.928	.723	.222

ملحق (٢)

جدول المساحات تحت المنحنى الطبيعي القياسي

$P(0<Z<z)$

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

المصدر : عن **[Daniel (1978)]**

$$P_r\,(\,S \leq S_{n,m}\,(\,0{\cdot}01\,)\,) = 0{\cdot}99$$

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3	298.0
2	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50	37.95
3	8.26	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	15.64	16.20	16.69	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55	19.77
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24	14.40
5	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.48	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.36	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.33	8.41	8.49	8.57
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.49	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23
11	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.13	7.20	7.27	7.33	7.39
15	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.81	6.87	6.94	7.00	7.05
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.73	6.79	6.85	6.91	6.97
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.28	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82
24	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60	5.69	5.76	5.83	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21
60	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.78	5.84	5.89	5.93	5.97	6.01
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.37	5.44	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
∞	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

تابع ملحق (٣) توزيع المدى القياسي

$$P_r (S \le S_{n,m} (0.05)) = 0.95$$

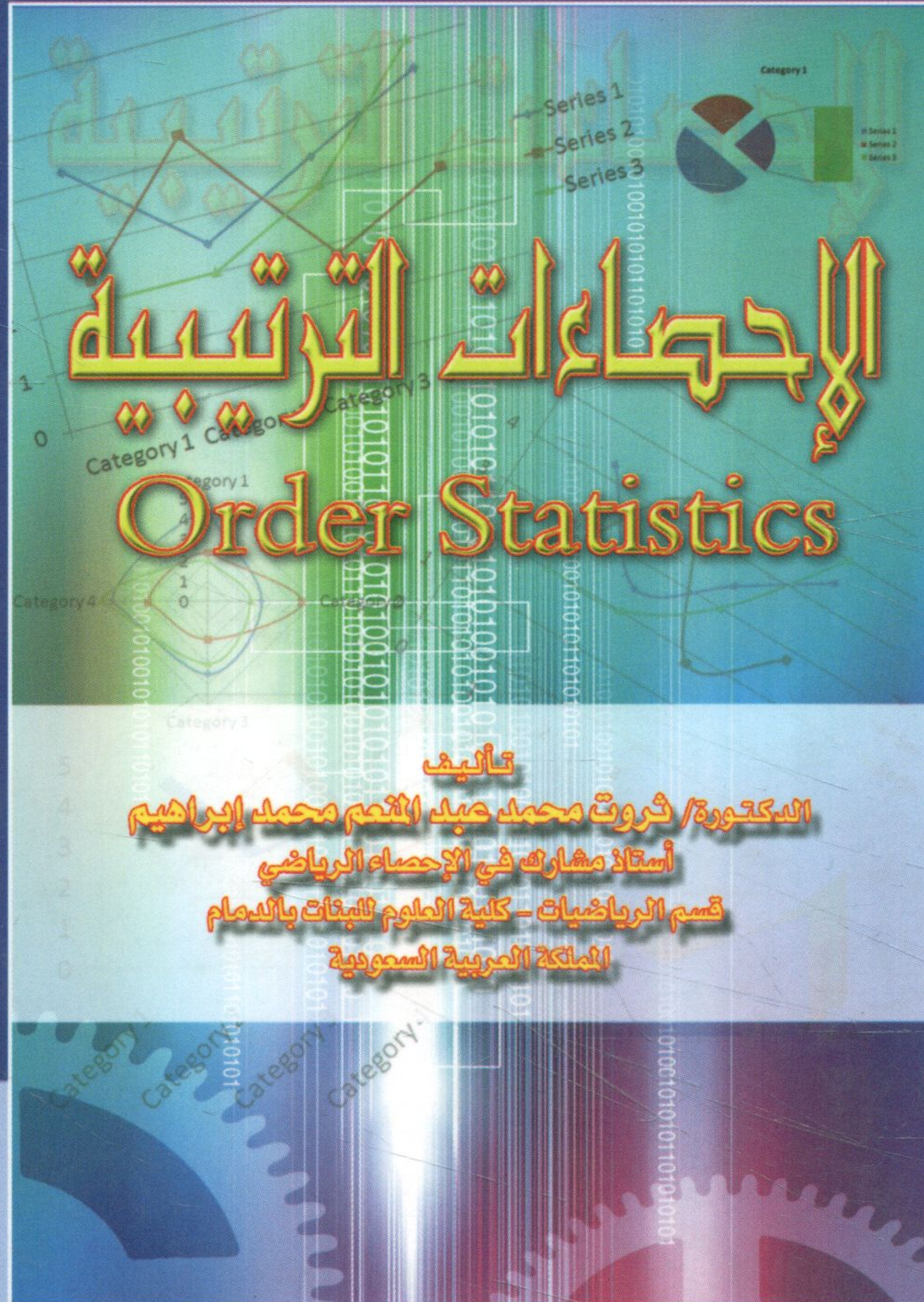
m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07	50.59	51.96	53.20	54.33	55.36	56.32	57.22	58.04	58.83	59.56
2	6.08	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57	16.77
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.15	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.11	11.24
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01

ملحق (٤)

جدول القيم الحرجة t_α لتوزيع **t**

	α						
v	.10	.05	.025	.01	.005	.001	.0005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

المصدر : عن **[Devore (1995)]**







مكتبة المتنبي
AL MOTANABI BOOK SHOP
الدمام - شارع المستشفى المركزي هاتف : ٨٤١١٣٩٥ / ٨٤١٣٠٠٠ فاكس : ٨٤٣٢٧٩٤
ص.ب : ٦١٠ الدمام ٣١٤٢١ المملكة العربية السعودية